

2. Similarity of Form and Substance : Modeling Material Kind

Richard Lehrer, Leona Schauble, Dolores Storm, Margie Pligge

Developing mathematical resources

1. 体積

測定の理論の発達に焦点を合わせる。

長さに関する測定に関するアイデアを体積の測定に関するものへ拡張。

生徒が単純なアルゴリズムの産物として体積を考慮することを防ぐために、空間としての体積の質を強調。

どのタンクがほとんどの水を維持するか決めるために、キューブで構成された3つの長方形プリズムを区分する、異なる方法を開発。

生徒は、空間を構造化する多様な方法を考慮することにより、3つすべてのプリズムは同一な体積を持つという結論に到達した。

体積の測定は”隠れたユニット”の考慮を要求することを、与えられたユニットのためのカウント方略は、生徒に教える。

生徒は、同一の体積が一定に与えられた、異なる長方形のプリズムをデザインし、長さのみ与えられた、異なる箱の体積を評価。

生徒は階層に組織化されたキューブの配列を形成する問題を解く。

生徒の一部は、各階層におけるキューブの数字を、階層の数字にかけ、

別の生徒は、階層の全体の数字まで、各階層におけるキューブの数字をカウント。

生徒のカウント方略はより有効になるし、空間の構造化は隠れたユニットを考慮した。

単純なカウント方略が無効あるいは不可能なとき、生徒は長方形じゃない形の体積を解決しようと試みる。

シリンダー形

スライスした面積の統合として体積を理解するチャンスを提供
多様な方法で3次元空間の再構成を経験させる。

生徒が提示した方略の強さと弱さを議論することが理解を促進。

1リットルのシリンダーと長方形を比較。

生徒は7つの異なる方略を提供。

高さが同じである場合は面積を比較(面積ベース方略)。

ある生徒は周辺の長さが大きいと体積が大きいと主張し、面積方略を妨害。

このような主張は周辺の長さや面積、体積の区別に役に立った。

同じ大きさの紙を一つは半分に折って、別の紙はシリンダー形で丸くする。
このようなものは「数学的ヒューリスティック」である。

2. 類似性

数学的説明を発達させる目標。

一定的な比率に関する知覚

比率の異なる長方形の「群」を選択、何が同じであるか描写。

同じ「群」の長方形は、同じ辺間の関係で描写できることに注目。

次は 12 個の異なる長方形で「ルール」を探す。

短い辺の 2 倍は長い辺のような単純な対数的表現を使用。

徐々に新しい事例を持ち込み、整数ではない比率の関係を描写、図 2 - 2 のようにグラフを書く。

グラフは異なる傾斜ラインの意味に関する思考を提供。

次は x 切片がある場合と比較。

2 次元での類似性の経験は 3 次元へ移行。

類似なシリンダーと類似な物体のグラフ表現

図 2 - 3 と 2 - 4 のように、異なる対数的表現があることに注目。

量的関係の表現とグラフを利用した表現

類似性は材料の密度理解に関するアナロジーを提供。

ベース領域とターゲット領域間の類推的なマッピングは数学的表現により維持される。

短い辺と長い辺の代わりに、大きさと体積。

しかし、3 次元で射影される材料の種類は、2 次元で表現できない場合もある。

このような数学的類似性と材料の種類間の相違はモデリングに関する中心的な認識の一つ。

Modeling material kind

体積 (volume)、質量 (mass)、密度 (density) は生徒に掴みにくい概念。

これらを単純に形式的な定義として (単位面積あたり質量の割合として密度を表現) 理解させようとするのは間違っている。

Smith ら (1992)、(1997) : 生徒の直観的な理論 (知覚的特性) と連結させる必要がある。

Preadolescent children は重さ (weight) と密度の区別ができない代わりに、「heaviness」の意味の中に融合させる。彼らは類推 (例、甘さ) と質的モデリングなどの利用を提案。

スミスらの観点に基づいて本研究は、「the relevant mathematics」の理解を通じた別のルートを提案。「quantitative reasoning」、密度計算の手続きに関する形式的な知識とは異なる。

生徒が発達させる数学的資源を考慮、物質のためのモデルとして類似性の上に描く生徒の能力をカウント、生徒はオブジェクトを持ち上げたり、水に入れたりして比較し、物理的な直観を立てた。クラスの教示では、このような初期の直観の出現を説明するために、数学を利用した。

1. 質量

24 個のオブジェクト（木、テフロン、アルミ、銅 × 6 種類のサイズ - 小さい球、小さいキューブ、短い円柱、短い長方形、高い円柱、高い長方形）。

これらの相対的な重さについて議論（単純な比較から、正確な測定方法へ拡張）。最も大きい物は最も重いのかに関する疑問のため、体積に関する生徒の基礎的理解が重要。このような初期の議論の後、生徒は、比較するものの数を最初化するアルゴリズムを生成。このアルゴリズムを実行するために天秤を利用。

ここで、教師は、どれくらい重いのかに関する質問を投げる。なぜなら、モデリングに関する基礎的なポイントを作るためのきっかけとして正確さに関する考慮が必要。

生徒は体積の測定に関する学習経験がある。比較のためには、standard units, appropriate units, zero point に関するアイデアが再び出現。天秤の使用には少数の標準質量セットが必要。生徒は、より軽いものを探した後、それをより重いものを探す標準として利用する方略を提案。

しかし、この方法は、繊細な注意と関係なく、違うグループが測定するたびに出現する誤差を克服できなかった。

生徒は、このような測定の分散の解釈に関して議論（平均、中央値などの提案）観察された測定はきちんとした手段を使用する必要があることに同意。分散に関する議論は typicality（典型）に有用な尺度の選択に役に立った。

2 . Revisiting volume

どれがどのくらい重いのかに関する質問に、一人の生徒が、銅が最も重くて、木が最も軽いと答えた。それに対して、別の生徒が、いつもそうではないと反論し、大きさに依存すると答えた。

24 個のオブジェクトの体積を探る手段として、ものざし、centicubes, グラフペーパー、目盛りつき容器による water displacement などが利用。

生徒はオブジェクトの形により手段が多様になることに気づいた。

生徒は再び各オブジェクトの体積の値を受け入れるかどうかについて議論。

図

教師は、Water displacement の貢献に関する生徒の主張を並列に示すことにより議論を促進させる。

体積は生徒の経験 (バスタブ) と結びつく。

このようなダイアログの形は、初期の反応 - 評価サイクルとは対照的であった。

ここで、教師は天秤を利用、異なる体積の水の重さを測定するように要求。

図

一人の生徒が、いつも一定の比率で増加になることに気づき、水の重さと体積は 1 ml あたり、1 gm の重さであると答える。

議論は、「Families of materials」に関する可能性に進む。

数学化(mathmatizing)は生徒の初期概念に対して堅い基礎を提供した。

3 . Families of material

各オブジェクトの体積と質量を最も正確に測定した後、「物質群仮説」を調査した。

クラスの壁に設置された大きなグラフに点を記入することにより。

教師は縦座標を G (20 単位尺度) として、横座標を ML (10 単位) としてラベリング。

生徒はラベルの意味と尺度について簡単に議論した後、グラフにオブジェクトを示す。

1) Reconsidering error

生徒一人が、一点が位置からずれている(out of place)ことに気づく。

別の生徒が plot される他の点と同じ形だが、それだけは異なる体積を持っていることに気づく (同じ形は同じ milliliter line の上にあるべきだと主張)。

今度は教師が銅に関して、すべてが同じラインにあるのかを聞く (否定)。

一人が、尺度が 20 単位になっているので、28.5 のような数字は正確に表示できないと

尺度の変換を提案。

ここで、一人が、重さと体積の測定における不正確のエピソード（エラー）を思い出す。Plot point について議論が続くなか、一人が対案(体積で重さを割って、異なる群の答えを探す)を提案。

図 Drew との会話

教師は以前、形の群わけをしたことを思い出させる。

教師はボードに対数的表現 ($v \times 8,5 = w$) を書く。

この議論は、以前の類似性の文脈と今度の文脈におけるラインの間の差を生徒に気づかせた。

2) Which Line?

生徒はどこにラインを書くべきかの問題に直面 (None zero 切片と zero スタートライン)。

生徒と教師の会話 図

$w + 4 = 1$ と $4w = 1$ の差

zero が意味することに関する議論(体積が 0、オブジェクトが存在しないこと、重さが 0)。

しかし、ここで一つのケースに交差するラインが発生。

Step number に関するチェックを提案。

4 . Lines and Rules: checking the steps

質量と体積に関する graphical 表現と algebraic 表現の関係を考慮し始める。

教師は傾斜の意味を聞く (「make steps」などの答え)。

Up 40gm, over 5 ml だから、傾きは 8 だと結論づける。

教師はこの数字の意味を algebraic 表現で書く ($v \times 8 = 40$)。

他の表現について聞く (体積で割った重さが 8、尺度という答えが出る)。

生徒はここで、傾きは物質の内包を持つ、ということに気づく。

5 . Reasoning about novels cases

最後の授業で、生徒は、知られてない物質の種類 (特に新規な液体) に関して推論する方法について議論。

実験者は緑色の液体のビンを見せる。

生徒との会話 図

すでに分かったことを利用してこれらの群分けをしよう。

水より平方メートルあたりの分子が多い。

Thicker なものは分子がより多いのか?

どうやってルールを探すか?

MI あたりの重さを量ると提案。

いくつかのチームに分かれて異なる体積のミスメリ溶液を測定。
緑色（グロセリン）1.3g/ml、金色（サラダ油）0.96g/ml
グラフにプロットした。

次は、どの材料が水に浮き、沈むかを議論。
木のみ浮くと答える（なぜなら、水のラインより下だったから）。
このことから、生徒は、金色は浮き、緑色は沈むと予測した。

生徒の会話図

この2番目のパートを通じて、生徒は共通の経験と測定における推定を発達させた。
このような共有された経験は測定の実験に関する理解、正確な推論、分散を解く方法などを提供した。
生徒は発見した。固体を沈めるとき、こぼれた水の量と体積は同じであること。
グラフを適切なモデルとして考慮する方法に直面したときは、科学の重要な認識論に焦点があたった。

Postinstruction interview

学期の終わりに17名の生徒が45分の面接を受ける。

内容は Appendix 参照

目的は、個人の遂行から授業で実験者が受けた向上への印象を確認すること。

1. 概念的差

1) 重さ - 体積：体積の同じ銅とアルミについて、どちらの水がより高くなるか
生徒82%が同じ体積だから同じ量の水と対置すると答える。
18%はより重いものがより多くの水と対置するという信念を主張。

2) 重さ - 密度：なぜ、金貨は沈んで、木は浮くのか、密度と関連することは？
65%が密度概念を説明。

1/4は、木は水より軽い種類だからと答える。

このような答えは先行研究（Smith, 1997）によると、感じる重さとの区別ができない状態と、重さと体積の区別ができる状態の転移段階である。

10%は重さと体積の一方しかいえない。

2. 比重

1) グラフ解釈による浮き沈みの予測

Appendix アイテム 2

5つのラインをみせ、A,B,C,E 物質を D (ある液体) に入れると、浮くか沈むか
82%が密度に基づいて正しく判断できた。

12%は、概念的表現はできず、グラフの上とか下の位置で正しく同定した。

2) 密度の発見と物理的明瞭さに関する推論

3. 構成物質に関する推論

結論

5年生授業

物質の比重と構成に関する推論のみならず、物体と液体の密度に関する推論

体積、類似性、割り当てに関する数学的アイデアの理解を構築

体積のような単純な概念に関して生徒の異なる思考の形を引き出す授業。

そのアイデアの間で矛盾と連結を発見させる。

2つの異なる立方体が同一な体積を持つかどうかを確かめる7つの異なる方法。

どの思考が正しいか決めるために、クラスの議論を評価することにより、生徒は自分の事前概念を再考慮する。

質量と体積に関する生徒の概念的区別は促進できる。

物質の種類による異なる質量を考慮する際、体積あたりのアイデアを無視する生徒。

24個の物質の質量と体積のための異なるグループの測定。

生徒は曖昧な方法で、重いあるいは、大きいのような用語を使用。

しかし、アイデアが数学化されたとき、生徒は正確な方法を考慮し始める。

Smithら(1997)の研究：中学生の体積に関する理解、物体が取り上げる空間の全体量として体積の理解は、体積から質量の区別と関連する。

数学的アイデアは科学に関する推論のソースとして役に立つ。

世界に関する概念的質問(なぜある物体より別の物体が重いのかを決めるか)は数学的質問に対する意味(測定の分散を表象するための最も典型的な数字は何か)を刺激。

モデリングの手段