I&C　2003　5/16　市原貴史

Psychological models for the development of mathematical understanding

Introduction

◇有理数・関数の領域

・最先端の数学の topic において基本的であり、純粋科学、応用科学の研究者にとって必要な理解の土台である

・習得が極めて困難

◇この研究の目的

・新しいパフォーマンスを支持する概念的理解のモデル化の試み

・この種の概念的な競合の発達のために改良されたカリキュラムアプローチのデザインの試み

◇数のセンス

・よい数のセンス(Bereiter and Scardamalia,1996,Case,1998,Greeno,1991,Sowder,1992)

-大きさの見積もりや判断における流暢性

-道理に合わない結果に気づく能力

-精神的に計算したときの柔軟性

-異なる表現同士の転移ともっとも適切な表現の与えられた状況へ使用する能力

-文脈やこの表現の目的に沿って多様な方法で同一の数や関数を表現する能力

◇数のセンスに対する初期の心理学的な想定

・中心的な概念構造として参照させる力強い組織的なスキーマに依存している

・対照的なノード、関係、オペレーターの複雑なネットワークとしてモデル化する構造

-知識の領域の中心的なものを表現

-子どもが、領域が表現する問題について考えるのを助ける。

-問題領域の高次な洞察の獲得のための道具

◇中心的な概念構造：２つの直感的また初期的なスキーマの統合によって普段は類似

1)最初：デジタルで、言語的で、連続的

2)2 番目：空間的で、類推的で、非連続的

(Case and Okamoto,1996,Griffin and Case,1997,Kalchman and Case,1998,Moss and Case 1999)

◇4 段階の学習フェイス

・レベル１の学習のフェイス

-２つの中心的なスキーマは独立している。

・レベル２の学習フェイス

-これら２つの初期的なスキーマをお互いに対応させると同時により複雑になる

-この結果、生徒の領域の学習は転移され、新しい心理学的なユニットが構成される

・レベル３の学習フェイス

-生徒は新しいユニットが適応される中で異なる文脈を区別してわずかに異なった表現を創造する。

・レベル４のフェイス

-生徒は中心的な構造の異なるこれらの多様性がどのようにお互いが関連づけられるかはっきりした表現を作り、自由に頻繁に目的に頼りながら転移を学ぶ。

◇数学における学習フェイス

・ケースらによって提案されたモデル(Griffin and Case,1997,Okamoto and Case,1996)

-数全体の発達が依存する初期的な数を数えるデジタルで連続的なスキーマ

(Gelman,1978)
-幅広く量を比較する、空間的、類推的なスキーマ(Starkey,1992)。
・レベル 1
-幼い子どもは数えることや量の比較に対して強い直感を持っている。
-これらの 2 つのスキーマは初期では別々に発達する。
-これを示した研究
∴数えることと量の評価が一致しているこの年代のレベルでこの 2 つの要因を見つけた。
∴子どもたちが回答するために他のモードに依存するあるモードに答えることが困難である要因を含む。
例：4 つの物体の配列されたものと 5 つ配列されたものを出されたとき、彼らは正しく 5 を数えることができ、5 が大きいと判断できる。しかし、直接 5 と 4 でどちらが大きいとたずねられたら答えるのに時間がかかる(Grifin,Case and Siegler,1994,Okamoto and Case,1996,Siegler and Robinson,1982）。
・レベル 2(6 歳ぐらいから)
-思考は子どもたちが家や学校で遭遇した数に関する問題によって刺激され、これら 2 つのスキーマを徐々に統合し、お互いを対応させる。
∴この分析的な活動で単独な要因を新しくあらわし、子どもたちは 2 つの初期的なスキーマの調和を必要とする多様な問題に答えることができる。
∴新しい構造は子どもたちが連続的に前後に数えることによって象徴的にまた、言語的に追加された問題や物質的な問題を含む幅広い多様性の cross-model 問題をとくことを可能にする。
・レベル 3(7 歳ぐらい)
-まとめて数えることができる(例：2 づつ数える)
-1 を 10s にまた、1 を 1s として数えることができる
(4)レベル 4(9 歳から 10 歳ぐらい)
-整数について一般的ではっきりした理解をする
-異なる数え方をお互いに対応させることができる
∴加減算の再構成、数を用いる問題の見積もり、補償を含む精神的数学の問題

Understanding in the domains of rational number and functions

◆Rational number

・レベル 1 では 2 つのスキーマを単独で発達させる。
-バランスの取れた評価に対する幅広い、質的な構造(Moss&Case,1999;Resnick&Singer,1993;Spinillo&Bryant,1991)
-掛け算、割り算の数的構造(Case,1985;Confrey,1994;Kieren,1992)
・新しいユニット：数直線
-学習者の数学の問題解決を促進させる。(問題は比例や割合、掛け算、割り算を含む)
-子どもたちは有理数の他の表現に拡張させる(分数、小数)。
-これらの関係を理解する。
・中心的構造(図 1.2)
-最上段は言語による表現
-矢印は操作を表す
-2 段目は視覚による表現
-3 段目は数の長方形
∴教授に用いる、デジタルなスキーマで空間的なスキーマを統合させる
∴これらが基準となる%を与える(50%、25%、12.5%)
-4 段目は共通の測定技術、計算の手続きを表す。
例：120ml の 75%を求めるとき 50%(60ml)と 25%(30ml)を求めて足し合わせ

る

◆**Mathematical　functions**

・よくなじんだ数列(例：0、4、8、12、16)

-初期的なスキーマ：デジタル、連続的

-空間的で類推的(棒グラフでは左より右のほうが長い)

・レベル 2

-これらのスキーマが対応付けられる

-デジタル、連続的なスキーマは数のペアを作りながら数列として適用される(0-0、1-4、2-8、3-12、4-16)

-x 軸が連続的なものになる

-各々のペアがデカルト空間(この場合は平面のグラフ)で表現される

-これらの作るパターンが理解される

-整数が計算とは関係なしに x 軸に沿って左から右へ移動する中でこれら 2 つが対応付けられる。

∴計算結果は y 軸

∴パターンの全貌はポイントが増えたときに見られる

-この結果、統合は新しい要素でこれが最初の 2 つのスキーマと対応付けられたとき y=4x が構成される。

・y＝4x の中心的的構造図(1.3)

-最上段は正の数のつながりを示す。

-2 段目が一定量をかけることを示す

-3 つ段目が棒グラフを示す

これらより、

-アナログスキーマとデジタルスキーマが対応付けられる

-一定量の増加がスロープととして理解される

-一般的な構造のモデルは他の関数についても当てはまる。（2 次関数、3 次関数等）

・レベル 3

-子どもたちは良く知った関数を区別することができる(例：直線と曲線)

-デカルト plain の 4 分円を区別する点に統合すること、これらの関係を理解することが必要

・レベル 4

-これらの関係を分析することによって、直線と曲線がどのように関係付けられるか、またはこれらの特徴を理解する。

-異なる領域(ここでは有理数と関数)の理解の発達は類似した方法で促進される。

Instructional programs

・子どもたちの一連の発達を促進する教授のデザイン

-深い概念的理解に基づく

-数のセンスの達成

・連続的で類推的な構造を考慮

・構造の区別や統合において必要なものを決定

・中心的な文脈の創造

-類推や比喩を含む

-初期のスキーマから目的とするスキーマへの橋渡しをする

-類推的な情報、デジタルな情報の両者を含む

-整数の学習で統合的な役割を果たす

・数が物理的な空間に固定された情報の創造が必要

・子どもたちになじみがあって日常生活と関連のある状況を作ることが必要

・中心的概念構造は象徴的、空間的情報と同じくらいの言語による情報を含む

-この研究で用いる方略によってこれらが統合される

・子どもたちがいろいろな表現を用いることができる授業のデザイン

◆Teaching rational number

・一般的な教授

-3、4 年生対象にパイチャートによる表現を紹介→加減算の練習をする

-異なる分母の計算ができる→できるようになると小数を紹介

-6 から 8 年生で割合を紹介

・この研究の方略

-2 つのスキーマをもとに統合させていく

◆Overview of the curricular sequence

・レベル 1

-2 つの基本的なスキーマ

∴直感的なスキーマと 2 分割、2 倍にするスキーマ

∴器に水を入れて量を見積もらせたり、形の違う器において量を比較させる

-1 から 100 の数になじみがある

-加減算ができる

-2 分割や 2 倍にすることを含めた掛け算、割り算の知識がある

例：50 が 100 の半分だと理解できる

・レベル 2

-有理数の一般的教授

∴関数を教えることから始まる

∴8 等分したピザを用いる→子どもたちは分割したうちの何個かを理解できるが、ピザ全体とのことを忘れる(Kerslake,1986;Silver,1997)

-この研究

∴器の中の水を 1 から 100 の数に対応付ける場を創造

∴割合の特殊なケースを教える

・レベル 3

-有理数のほかの表現を教える

-小数を 2 つの整数の間の数として教える(例：5.25 は 5 と 6 の間の 25%)

・レベル 4

-いろいろな表現に変換することができる(例：%→小数、%→分数)

Details of instructional sequence for fourth grade

-毎回カリキュラムは最初にデザインした一般的手続きに従う。

-被験者：４年生・・・いろいろな能力を持った子どもが混在している。

-授業：１回につき１時間、週１、２回を３ヶ月にわたって行う。

◆Estimating　Percent(lessons 1-3)

・割合の紹介

・日常生活の中で割合が現れる例について考えさせる。

・これらの例をクラス全体に報告させる。（例えば、学校の男女比、デパートの半額セール、レストランにおける消費税）

・抜いたりさしたりして長さを変えることのできるパイプを子どもたちに見せる。

-子どもたちは、また、砂や水が入ったビーカーやガラス瓶を使いながら割合の見積もりを続ける

・割合の標準的な表現の仕方を紹介する。

◆Computing percents (Lessons4-6)

・計算や測定に基づいた見積もりとともに共通な視覚的な見積もりを紹介する。

例:20ml の 50%は 10ml

・子どもたちは心の中で体積の割合を計算する。

例:60ml 入るビーカーの 50%は 30ml であり、25%は 15ml である。

・他の試み

・教室での物体の測定を含み、50%、25%、12 と 1/2%、75%のように異なる基準

点との違いを計算して見積もる。

- 子どもたちは、計算するための一般的な方略を与えらない。それゆえ、自分自身で発見した一連の方略を用いる。

例:80cm のデスクトップの 75%の高さの計算

Step1:80cm の 50%は 40cm と計算する。

Step2:75%と 50%の差を計算する。

Step3: 80cm の 25%は 20cm と計算する。

Step4:各部分を足す。(40+20=60)

・子どもと教師の身長の高さを比較する。そして、子どもの身長が教師の身長の何%かを割り当てる。

- Peter の身長は Jone の何%でしょうか？

- あなたの身長はお父さんの何%でしょうか？

◆Introduction to decimals using stopwatches (Lesson7-8)

・割合の学習の延長として小数の概念を紹介

-子どもたちは小数のことを議論

-整数より正確に測るにはどのようにすればよいかを議論

・2 つの小数をこれらが 2 つの整数の間の距離の何%を占めるかという課題として紹介

-秒を表したり、右側に 2 つの 100 分の 1 秒を示すスクリーンがある LCD ストップウォッチを用いる。

-これらの小さい数が何を示すのか長く議論をしたあとに子どもたちは 100 分の 1 秒をセンチ秒に対応させる。

・多くの活動は子どもたちが概念的に難しい量や順番を明らかにするために小数を操作する活動を助ける目的で与えられる

-最初の活動は、ストップウォッチを動かしたり止まらせることである。

-子どもたちはストップウォッチを起動させ、できるだけ早くとめ、何回か成功する。

-自分の一番早い記録と他の友達の記録を比較する。

∴ある子どもは 0.09 秒に挑戦するのに十分早く反応できる。

∴0.09 と 0.40 ではどちらが大きいかという問題を自然に与えることができる。

・Stop the Watch Between

-量について学ぶの活動

-目的：生徒が 2 つ小数を決定して、その 2 つの間のどこかでストップウォッチを止めることである。

・Crack the code

-1/2(0.50)だったらこの数と等しくなるようにストップウォッチをとめる

・この活動の拡張

-子どもたちは他のクラスメイトたちに挑戦させるいろいろなゲームを考える

◆Fractions (Lessons14-17)

・小数と割合を関連付けるために分数の授業

例：1/4 をできる限り考えられる方法で形式的な分数や、小数、割合の表現の代数的な形を用いて表現する。

・問題に挑戦して、小数や分数、割合が混在した問題を考える。

例:1/8+10%+0.75=1 は正しいですか?

◆Review (Lesson 18)

・子どもたち自身が分数、小数、割合の加減算を含んだ問題を作る活動

-この作られたいろいろな問題を解くことについてクラスの子どもと競う。

-子どもたち自身が比例の数の教授方略を考える。

-他のグループの子どもにこの方略を用いて教える。

-比例の数の教授と関連のあるゲームやビデオを考案する。

Results from the rational number studies

・課題：自然に標準、伝統的課題を反映している。
・課題のサブカテゴリー
　-比例の数のセンスの変化が分かる項目
　-序章で述べた一般的な数の変化が分かる項目
・比例の数の比較や配列、分数、小数、割合の各々の変換、量について知覚的に誤解しやすい問題解決、比例の数の問題を作る項目
・被験者
-レベルの高い 4 年生(16 人)と統制群(Moss&Case,1999)の比較
-いろいろな能力の子どもが混在した子どもを対象(4 年生 21 人 6 年生 16 人)
-実験群の子どもと、伝統的な普通の教育を受けた子どものポストテストを比較(4 年生 30 人、6 年生 36 人、8 年生 26 人、新卒の教師 32 人(Moss.2000)
・結果
-実験群全体のプレとポストにおいて標準偏差の幅が 2.3 から 3.5 であり、効果的なサイズに達した。
-実験群の 4 年生、6 年生はポストテストの成績が統制群の 8 年生より良い
　-新卒の先生とは同じスコアであった。
-実験群の子どもは、統制群の子どもに比べて、新しい問題を解くとき、整数の方略に自信が持てず、解答があっているかどうか判断するために提案された概念を参照させることが多かった。
-実験群はプレではほとんどの学生が答えることができなかったが、ポストテストでは、80%以上の子どもが正当に達した。
問題：1/8 の小数を知っていますか。
　-たいていの子どもが正解にいたるときに使う方略
　∴割合の表現を問題が含んでないときでさえ、最初はパーセントの使用を示す。
　∴割合を分数表現から小数表現にする。
　∴2 等分や倍にする操作の使用が明らかになった。
　∴統制群の 50%以上の人が 0.8 を 1/8 として答えていた。
・有理数のシステムを理解しているかみる問題：1/4 と 2/4 の間は何でしょうか？
　-実験群のポストテストで 80%が正当(プレでは正答者は 0%)
　-統制群の子どもに、このような分数の表現があること想定できない。(46%)
・視覚的に間違えやすい問題：ピザを 3/4 にする問題。(このピザは 8 つに分けてある)
　-ポストテストでは実験群の 90%以上の子どもが正当
　-統制群では、50%か正当
・習った方略では解決できず、新しい方略を考える問題：160 の 65%を求める問題
-全体の 68%の子どもが正答
-低学年は解けない
-新卒の教師は 60%しか答えられなかった.
-これらの例の中で推論は基準となる量を用いてパーセントで表す。
-数を変換することは未知の問題に対して効果的な方略であることを示す。

Discussion of rational number studies

・子どもが獲得された理解を成し遂げる力
　-小数、分数、割合を臨機応変に用いる能力によって示される数のシステムの理解
　-システムの中の比較したり配列する能力に見られる有理数の大きさの適用
　-同量の促進の土台となる領域の提案と比例に基づいた構成の理解
　-方略を開発する能力、自信が証拠となるオペレーターとしての割合の理解
-学習した基準となる割合を使って考える力の流暢性
・中学年より提案的に基づいた分数や小数の理解についての成功した報告(Confrey,1994;Kieren,1995;Mack,1995;Streefland,1993)と次の点含みながら共通している。

・共通点
-有理数の意味の強調
-有理数を日常から導入することの強調
-子どもたちが自然な方法で問題を見ることの強調
-一連の解決の方略と視覚的表現の相互の形の使用
Confrey とは子どもの理解を有理数の単一の表現から有理数全体の理解へと変えることが共通している。
・これらの研究の共通点は次の強い強調を含む
-とびとびの値ｗｐ数えることに対して連続量と測定
-測定の中で用いられる自然な計算の形
-異なる表現の有理数を同等に見ること
・この研究の独特な点
-子どもが、分数の概念を持たないようにしながら、割合からはじめて子どもが利益を得ることと、質的な割合の理解と 1 から 100 までの数を連結できるように支援する点
-複数の単位や分割よりはむしろ幅広さと、自然な量の割合を強調する中で 1 次元の数直線を用いる点
-割合、小数、分数を同等とする基準となる値を用いて、より柔軟なファッションと自分で開発した方略使わせるよう支援する点

Curriculum for mathematical function

・標準的な教授法
-グラフ、円による表現、代数的な表現を紹介
-一般的には 9 年生で紹介
-最初に代数の式が初期的な関数として教えられる
-表中の数に見られるグラフや円のパターンが 2 番目に教えられる
-グラフの代数的な意味を教える。
-目的：標準的な関数(一次関数、二次関数など)を同定して操作する能力を身に付けさせる。
・実験的カリキュラム
-違いを強調して領域を紹介
-目的：表 1 に示した発達的な結果を持たせること

◆Overview of curricular sequence

・レベル 1 and 2

-子どもたちが心理的で数学的な対象を想像できるようにデジタルのスキーマとアナログのスキーマを詳しく述べ、それらを対応付けることを支援する。
-Bridging context
-関数のデジタルで計算的な側面、グラフの側面があり、同時に理解できる。
-長距離競歩
-スポンサーシップルールが参加者を次々と変えて、結果が、表中の数字や一連の棒グラフで表される。
-子どもたちが経験を持っていて、問題の多様性(距離やお金)も数学的に理解できる。
-これらの関数の関係を理解できる。
-積み上げたお金の比率の異なるルールに興味を持つ
-距離を連続的な多様性として、もし、終わりの部分の 1km を歩いたら何が起きるか興味を持つ。
例：1km 歩くごとに 1 ドルもらえるルール
-1km 歩くごとに 1 ドルもらえて、合計金額は歩いた距離に依存すること、これが、掛け算により得られることを理解する。
-記号は＄や km を紹介することによって簡単に構成できる。

-1km につき 1＄もらえることも、1&×km、と理解される。

-この活動には、グラフ、円、代数的・記号的な表現が数学的な方程式としてみられる。

・レベル 3

-コンピューターラボで、グラフを作成するスプレッドシートの拡張技術を紹介する。

-最初のプログラムからアイデアを適用したり統合したり、異なる関数についてパラメーターを変えて区別し始める。（スロープ、ｙ軸に限度のある関数、指数関数）

-一般的なアイデアは、個々の関数の特徴を理解すること、ｙ＝mx+b y=ax(2 乗)+b のような全体の良く似た関数を生成すること、これらの関数の違いを区別すること、これらの関数の関係を理解することであり、いろいろな異なる表現の中で変わる。

・レベル 4

-コンピューターを使ってグラフの特性や一般的な振る舞いを見つける(例えば、直線や二次曲線、三次曲線)

-この表現をさらに発展させてクラスメイトと共有する。

◆Typical instruction sequence for grade 8

・異なる学校、クラスで実行することは難しいので１つのレッスンの時間は異なる。(同じである必要はない)

・1 つのレッスンは大体 1 時間で 10 日から 15 日かけて行う。

Lesson1 and 2：関数と傾きの紹介

-10km の長距離競歩

∴1km ごとに 1＄もらえる。

∴強調点：横軸の動きを見てそのときの値を見ること

∴この作業を通してグラフの動きを見る側面を高める

-一度グラフが構成されると km と＄を使って象徴的に表す方法を考える

∴各時点における操作を考える。この場合 km×＄

∴1 に注目

∴1 の意味やグラフの値と対応させながら考える

∴1 つづつ増えているのに気づく

∴y＝x を形成する

∴増加分が傾きに対応することを理解(これは教えられていない)

-同じことについて 2＄や 5＄など、1km ごとにもらえるお金を変えて行う(このルールは子どもが考える)

∴グラフ化の前に基準を作るために y＝x と比べてどんな傾きになるか予想をする。

∴共通の特徴について話し合う：全て直線、原点を通る、数が大きいと傾きが大きい。

∴それぞれのグラフの傾きを求めることを課される(これは収束的に行われるのではない)

・Lesson2：y 切片

-長距離競歩のスタート時点ですでにボーナスとしてお金がもらえる

さらに、1km ごとに 1$もらえる。

例：１×km＋5＝＄を形成するようもとめられる。

-他のルール：スタート時にもらえるお金が違う。

-全てのルールを比較する。

∴全て直線である、全ての直線が平行になっている、1 つづつ増えている、最初の値が違うだけであとが同じ

-ｙ切片がスタート時のお金として数学的な名前で紹介される

-グラフ上のスタート時点のお金を変えることによって合計金額を変えることについて話し合う。

・全ての傾きや切片を表、グラフ、方程式から見つけることをテストする。

・Lesson3：曲線

-直線より曲線のほうが多いことを説明する。

-今まで使った曲線のグラフの数的特徴を再びいうように求められる。

-y＝x(2 乗)の表を与えられて関数を見つけるように指示される

∴増加の仕方が一定でないことに気づく

∴今までの方略は使えないことに気づく

∴各値が 2 乗になっていることに気づく。そこで km×km を表現する。

-低学年の子どもは指数を知らない：km(2 乗)、km(3 乗)が km×km、km×km×km に相当することを説明→方程式は＄＝km(2 乗)

∴関数を子どもが使いがちなラインの分割よりもむしろスムーズな曲線と対応させる。

∴子どもたちは最初のもち金が直線のときと同じ役割を果たすことに気づく。(増加率は変わらず、y 軸上の点だけ変わることに気づく)

∴1 が係数で、最初の持ち金が 10＄の時は km(2 乗)＋10＝＄と表現する。

-子どもは関数を見つけることに挑戦：153＄稼ぐ関数を見つけるのにそれを適用する。

・Lesson4：負の傾きと切片

-y 軸に負の数が使われたかどうなるかたずねられることにより紹介

∴長距離競歩では 1km ずつにお金が減っていくのでグラフの右下がりに気づく

例：1km ごとに 2＄減っていく場合

毎回 2 $減っていき、方程式は km に－2 をかける。Y= - 2x

(2)負の数の切片を紹介される：スタート時のお金を払う

・1km につき 1$もらえるゲームで 10$払う場合。

この表や式を作ることを要求される。1×km－10＝＄

-いろいろな関数に挑戦し、グラフ、表、式を作る

・Lesson5-8：コンピューターでの活動

-コンピューター上でティーチング・ツールを使ってペアで授業を受ける。

∴このコンピューターは今までやってきたことをより発展させるように作られた。

-傾き、切片、指数を変えるよう指示：色でプロットされたグラフ表示に気づかないようにする。

-プロットされたポイントから直線や曲線が分からないよう 1 つ以上のパラメーターを変えることを指示

-新しい関数、表より得られた結果とグラフの意味を記録することを指示される。

-関数の目に見える数の特性を創造すること、コンピューターに関数のプログラムを打ち込むこと、結果を記録することを求められる。

・Lesson9-10：クラス発表

-コンピューター上で具現化した関数の型について発表する。

∴グラフ、式、表による関数の一般的特性、振る舞いを捕らえること、自分たちの得た知識をクラスメートと共有することが求められる。

-子どもは聴衆の 1 人として参加して

フィードバックを与えること

はっきりした質問をすること

自分たちの理解ではっきりしていないことをたずねる

Result from function studies

・テストは発達モデルの理解を反映するように作られた

・項目は実験群の子どもと 6、8、11 年生の反応を一致させるように難易度があがる。

・統制群は 8、11 年生のみを使用→6 年生は比較できる標準的なカリキュラムがないから

・6 年生は 2 つの異なるクラスで行われた研究を用いる(34 人)

・8 年生の実験群と統制群を分けて行った研究を用いる(Kalachman & Case1998,1999)

・11 年生は実験群と統制群を分けて行った研究を用いる(Kalachman 2000)

・11 年生の関数の議論の分析はテキストに基づいたプログラムを用いた(Kalachman,Kats 1999)

・最初の例：図 5：この図上での範囲でこの関数と交わる関数を考える

-直線の解答例：傾きが 3.5 以上で y 切片が０、ｙ切片が７以下で傾き１以上

y 切片が７以上１０以下で傾きは負

-曲線も可能

∴y 切片が０→値が急激に増えればよい

∴y 切片が交わるくらいに大きければよい

-実験群の６年生は 70%正答、ハイレベルな 11 年生の正答率が 9%(共にプレでは０%)

・2、5、8、11、14、17 の数列を見て関数を求める課題

-1 つ 1 つの数はキーとなる情報を与えることを理解しなければならない(x に何をかけるか、x が 0 のとき関数はどうなるか？)

∴低学年や統制群の一般的解答：ｙ＝x＋3(3 つづつ増えるから)

∴実験群の 8 年生は 80%が正答、統制群は 4%が正答(プレではともに 0%)

・最後の課題：図 1.6

-正答するために

∴よくなじんだ関数と区別(一般の 2 次関数の特殊な表現など)

∴関数を構成する代表的グラフ的数的パラメーターを理解しなければならない

-テキストを使って学習した子ども、小さい子どもは正答できない(負の指数を用いていた)

Discussion of function studies

・関数について考えるとき、小さな子どもでさえ洗練された方略を使える

・知的発達の初期段階であること、数学の進んだアイデアの経験が乏しいため領域の内容が生徒の能力を超えていること

・年齢にかかわらず

-領域の表現と操作の移動

-図 2 の関数の表現の数学的理解

-異なる表現を関連させる力

・印象深い文脈

-このような力を促進する

-中心的なデジタルなスキーマとアナログなスキーマを結合する

-初期のカリキュラムで数的、グラフ的、代数的な表現を結合する

-領域の完結した概念構造に向けて移動させるために､念入りな結合を必要をさせるコンピューター上での活動に取り組むときこの基礎知識は拡張する。

General Discussion

・有理数と関数のプログラムの結果は先に行った整数のプログラム(Griffin&Case,1997)に加わる

・これらの研究は子どもたちが自然な発達の一連を持ち込まれ、意味のあるなじみのある文脈でいろいろなファッションの結合した空間を発見することができる中でデジタルな表現とアナログな表現を互いに対応させたとき、どのように深い理解を発達させるか示した

・カリキュラム全体の特徴：自然言語の使用

：子どもたちが表現したり話し合いができるユニークな産物の創造

・一連のカリキュラムだけでなく、改良されたオーナーシップのセンスと自分の学

習や他人の学習に関する高い位置付けを想定する力
・これらの領域が全ての年齢の生徒に歴史的に表現されたよく知った問題を与えると、カリキュラムの達成は多様性、流暢性、プロトコルに表れたオーナーシップが顕著である。
・強調したいこと：カリキュラムに基づく心理的構造の説明の断念を強調してこなかったこと
・発達が領域の土台となると考えられる中心的概念的な記述を与えられると一連のカリキュラムをデザインしていろいろな工夫をして指導をはじめる。
・カリキュラムが行われると生徒の間違いは生徒が他のことから自由に評価すると考えられる情報が中心的概念的構造に含まれることを敏感にする。
・全ての構造的な一連は発達的な伝統の中で独特の起源を持つ
しかしながら、各々のケースではデザインされたカリキュラムのオリジナルモデルを用いるとモデルが子どもたちの学習の中で拡張され、延期される。
↓
・モデルは良くなり、数的・言語的・象徴的な中身をもつ
・学習や教授が洗練されるといろいろな年齢にわたった心理的プロセスの深い理解が得られる。