

Contributions of Domain-General Cognitive Resources and Different Forms of Arithmetic Development to Pre-Algebraic Knowledge

Lynn S. Fuchs, Donald L. Compton, Douglas Fuchs, Sarah R. Powell, Robin F. Schumacher, Carol L. Hamlett, Emily Vernier, Jessica M. Namkung, Rose K. Vukovic

Developmental Psychology, 2012, Vol. 48, No. 5, 1315-1326

1. はじめに

代数学についての能力の発達の個人の違いについてはほとんどわかっていない。

プレ代数知識の個人差への、一般領域の認知資源と算数の貢献について評価する。

- 代数学の基礎になるスキルを確認、習得の手助けになる [National Mathematic Advisory Panel, 2008]

2. Development of Algebraic Knowledge

プレ代数知識 ⇒ 等号記号が意味する関係を正しく理解する

Pillay, Wilss, Boulton-Lewis の学習モデル [Pillay et al., 2008] を用いている。

プレ代数知識の出現について、二つの関連する点について研究する。

- 1つ目は、異なる算数の能力で、プレ代数知識の基礎となるものを評価
- 2つ目は、高次、低次の認知資源で、算数の影響を受けてプレ代数知識に作用するものを評価する

3. Foundational Arithmetic and Cognitive Resources Involved in Pre-Algebraic Knowledge

計算の流暢性は、ワーキングメモリへの要求を減少させることで、非標準的な等式と変数を操作する課題のために注意力を使えるようにする。これによって、プレ代数を支援するかもしれない。 [Geary et al., 2008]

文章問題スキルは計算を含んでいるだけではない。

- 記号表現の二つの形式（数的、文字的）に関連し、既知と未知の数の関係の理解を反映する
- 「Mary は John よりも 6 つ多く持つ」を小さい数は大きい数と等しくなるように増加しなければいけないと認識することで「 $M = 6 + J$ 」と変換する

4. Present Study Overview and Hypotheses

4.1 測定要因

この研究では認知資源と算数スキルを測定している。

- 認知資源
 - ✓ 口語
 - ✓ 非言語意味理解
 - ✓ 数のためのワーキングメモリ
 - ✓ 文字や文のためのワーキングメモリ
 - ✓ 注意深い行動
 - ✓ 音韻処理
 - ✓ 処理速度
- 算数スキル
 - ✓ 計算の流暢性
 - ✓ 文章問題のスキル

4.2 概観

小学2年生の始めから小学3年生の終わりまで約2年間測定した。

小学3年生の終わりに計算の流暢性と文章問題について再評価する。

プレ代数知識である等号記号の理解と変数の概念についても評価した。

4.3 仮説（算数能力）

- 1) 小学2年生の計算の流暢性と文章問題スキルから、プレ代数への直接的なパスが存在する
- 2) 小学2年生の算数は部分的に小学3年生の算数と関連している
- 3) 計算の流暢性より強いプレ代数知識へのパスを文章問題は持っている
- 4) 小学3年生の算数は直接的にプレ代数へも作用する

4.4 仮説（認知資源）

- 1) 非言語意味理解、口語能力、ワーキングメモリ、注意深い行動の能力のプレ代数知識について、重要な役割を担う
- 2) 非言語意味理解、口語能力、ワーキングメモリ、注意深い行動の能力の効果は、プレ代数を直接的に操作する
- 3) 小学2年生から小学3年生までで、非言語意味理解、口語能力、ワーキングメモリ、注意深い行動の能力が算数を経由したことで間接的な効果が生じる
- 4) しばしば算数と関連する低次の認知資源の効果は計算スキルを仲介される

5. Method

5.1 Participants

the Wechsler Abbreviated Scale of Intelligence[WASI; Wechsler, 1999]のサブテストの2回ともでスコアが80を下回らなかった、小学2年生の生徒309名を対象

- ✓ 簡単な足し算問題と簡単な文章問題の測定によって選別した
- ✓ 閾値よりもスコアの低い生徒を半分ずつ、二つのクラスに振り分ける
- ✓ 残りの生徒は半分ずつランダムにそれぞれのクラスへ振り分けた
- ✓ 小学3の春までに転校した30名を除外した
- ✓ Missing Completely at Random Test [Little, 1988]を用いる
 - そのため279名が最終的な分析対象

5.2 Cognitive Predictors

- 非言語意味理解 (Nonverbal reasoning)
 - WASI Matrix Reasoning [Wechsler, 1999]
 - パターンの完成、分類、推論、連続的な論法のタスクを含む
- 言語 (Language)
 - WASI Vocabulary [Wechsler, 1999]
 - 表現語彙、言葉の知識、情報の基盤を測る
 - Woodcock Diagnostic Reading Battery-Listening Comprehension [Woodcock, 1997]
 - 文または一節を理解するための能力を測る
- 注意深い行動 (Attentive behavior)
 - SWAN [Swanson et al., 2004]
 - 多肢選択式質問紙
- ワーキングメモリ (Working memory)
 - 数を数え、覚えているためのワーキングメモリ = Counting Recall
 - 文を見て、覚えているためのワーキングメモリ = Listening Recall
- 音韻処理 (Phonological processing)
 - Sound Matching from the Comprehensive Test of Phonological Processing [Wagner, Torgesen, & Rashotte, 1999]
 - 同じ音を認識できるか測定
- 処理速度 (Processing speed)
 - Woodcock-Johnson III Visual Matching [Woodcock, McGrew, & Mather, 2001]

5.3 Arithmetic Performance

- Second-grade calculations
 - 答えが 6～12 の簡単な足し算問題×25 問
- Second-grade word problems
 - 簡潔な文章問題×14 問
- Third-grade calculations
 - 答えが 6～12 の一ケタの足し算問題×25 問
 - 答えが 6～12 の一ケタの引き算問題×25 問
 - 答えが 5～18 の一ケタの足し算問題×25 問
 - 答えが 5～18 の一ケタの引き算問題×25 問
 - 二ケタの足し算問題×20 問
 - 二ケタの引き算問題×20 問
- Third-grade word problems
 - 文章問題（足し算、引き算、掛算、割り算）×22 問

5.4 Pre-Algebraic Knowledge

プレ代数の知識として二つ挙げる。

- (a) 等号記号はその両側がお互いに等しいことを表す。非標準的な方程式にも適用できる。
 (b) 変数の概念を理解している。関数表を完成させることに適用できる。

Sample Test Item: Test of Early Algebraic Cognition—Example of Function Problem Type

x	$x + 3$
8	11
1	4
7	
3	6

- 非標準的な等式の問題×18 問
 (たとえば $y + 4 = 9$, $1 + 5 = 4 + x$)
- 標準的な等式の問題×2 問
 (たとえば $2 + 3 = x$)
- 関数表を完成させる問題×4 問
 ($x + 3$, $y - 6$, $2x + 1$, $3y$)

5.5 Procedure

試験者はプレテスト 19 人、ポストテスト 18 人

試験者は決められた指示通りに教示を行う。

- プレテスト
 - 小学 2 年生の 9 月に、大きな集団で、計算テストと文章問題テストを行った
 - 小学 2 年生の 9 月から 10 月の間で、一般領域の認知について 3 つの個々のセッションを行った
- ポストテスト
 - 小学 3 年生の春に、小さな集団で、計算、文章問題、プレ代数知識を測定した
 - 参加者は問題解決するに当たり、プレ代数知識測定でも他の 2 つと同様に教示を受けなかった

すべてのセッションはテープに録音した。

録音したテープは 15% をランダムに選び、試験者によって階層化された。

選ばれたテープの正確さは、独立したスコアラーによって確かめられた。

一致は 99% 以上だった。

6. Data Analysis and Result

Table 1
Means, Standard Deviations, and Correlations ($n = 279$)

Variable	Raw score		Standard score		Correlation											
	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Domain-general cognitive resources																
1. Nonverbal reasoning	12.28	5.71	48.34	9.74	—											
2. Language	0.17	0.95			.23	—										
3. Attentive behavior	36.72	11.87			.26	.46	—									
4. Working memory—sentences	7.74	3.55			.26	.28	.25	—								
5. Working memory—numbers	14.34	3.39			.29	.21	.26	.35	—							
6. Phonological processing	15.53	4.22	9.47	1.73	.32	.27	.40	.31	.13	—						
7. Processing speed	11.39	2.59	95.06	12.93	.27	.21	.28	.27	.11	.21	—					
Arithmetic skills																
8. Grade 2 calculations	8.60	4.68			.19	.22	.32	.21	.12	.27	.34	—				
9. Grade 2 word problems	7.70	3.78			.34	.52	.52	.30	.23	.32	.30	.42	—			
10. Grade 3 calculations	94.15	30.31			.35	.31	.52	.21	.26	.39	.34	.59	.47	—		
11. Grade 3 word problems	13.01	4.02	44.27	15.63	.41	.59	.56	.38	.29	.43	.31	.43	.62	.54	—	
12. Pre-algebraic knowledge	12.37	5.11			.43	.48	.51	.26	.27	.40	.33	.42	.56	.65	.63	—

Note. $p < .05$ for coefficients at or above .118 (two-tail probability). Nonverbal reasoning is the Wechsler Abbreviated Scale of Intelligence (WASI)—Matrix Reasoning. Language is a composite score across the WASI—Vocabulary subtest and Woodcock Diagnostic Reading Battery—Listening Comprehension. Attentive behavior is the SWAN. Working memory—sentences and working memory—numbers, respectively, are Listening Recall and Counting Recall from the Working Memory Test Battery for Children. Phonological processing is the Comprehensive Test of Phonological Processing—Sound Matching. Processing speed is Woodcock-Johnson III Visual Matching. Grade 2 calculations are single-digit addition. Grade 2 word problems are story problems. Grade 3 calculations are a composite score across single-digit addition and the Double-Digit Addition and Double-Digit Subtraction Tests. Grade 3 word problems are the Iowa Test of Basic Skills—Problem Solving and Data Interpretation. Pre-algebraic knowledge is the Pre-Algebraic Knowledge Test. Standard scores are $M = 100$ ($SD = 15$), except vocabulary and nonverbal reasoning ($M = 50$, $SD = 10$), phonological processing ($M = 10$, $SD = 3$), and word problems (normal curve equivalents).

Table 2
Direct and Indirect Effects of Arithmetic on Pre-Algebraic Knowledge (n = 279)

Type of effect	Effect															
	G2 calculations				G2 word problems				G3 calculations				G3 word problems			
	Path	SE	b/SE	p	Path	SE	b/SE	p	Path	SE	b/SE	p	Path	SE	b/SE	p
Direct	.001	.007	0.11	.913	.147	.053	2.78	.005	.391	.060	6.77	<.000	.176	.060	2.92	.004
Total indirect	.236	.035	6.77	<.001	.067	.029	2.30	.022	.026	.013	2.01	.045				
G2 word problems	.032	.013	2.53	.011												
G3 calculations	.160	.030	5.33	<.001	.026	.022	1.18	.239								
G3 word problems	.018	.012	1.51	.132	.039	.015	2.60	.009	.026	.013	2.01	.045				

Note. G2 calculations are single-digit addition. G2 word problems are story problems. G3 calculations are a composite score across single-digit addition and the Double-Digit Addition and Double-Digit Subtraction Tests. G3 word problems are the Iowa Test of Basic Skills–Problem Solving and Data Interpretation. Pre-algebraic knowledge is the Pre-Algebraic Knowledge Test. *b* = standardized beta value; G = grade.

Table 3
Direct and Indirect Effects of Nonverbal Reasoning, Language, Attentive Behavior, and Working Memory–Sentences on Pre-Algebraic Knowledge (n = 279)

Type of effect	Effect of															
	Nonverbal reasoning				Language				Attentive behavior				Working memory–sentences			
	Path	SE	b/SE	p	Path	SE	b/SE	p	Path	SE	b/SE	p	Path	SE	b/SE	p
Direct	.137	.044	3.13	.002	.135	.061	2.21	.027								
Total indirect	.097	.032	3.06	.002	.116	.033	3.48	.001	.218	.041	5.34	<.001	.009	.031	0.29	.771
Via G2C	.000	.002	0.11	.917	.000	.003	0.10	.918	.001	.010	0.11	.914	.000	.003	0.11	.915
G2W	.010	.010	1.94	.051	.044	.018	2.49	.013	.035	.015	2.32	.021	.009	.009	1.04	.299
G3C	.044	.022	1.98	.047	.001	.021	0.05	.962	.096	.024	4.01	<.001	-.030	.020	-1.52	.129
G3W	.023	.012	1.99	.047	.052	.019	2.74	.006	.025	.014	1.82	.067	.018	.010	1.84	.065

Note. Nonverbal reasoning is the Wechsler Abbreviated Scale of Intelligence (WASI)–Matrix Reasoning. Language is a composite score across the WASI–Vocabulary subtest and Woodcock Diagnostic Reading Battery–Listening Comprehension. Attentive behavior is the SWAN. Working memory–sentences are Listening Recall from the Working Memory Test Battery for Children. G2C is single-digit addition. G2W is story problems. G3C is a composite score across single-digit addition and the Double-Digit Addition and Double-Digit Subtraction Tests. G3W is the Iowa Test of Basic Skills–Problem Solving and Data Interpretation. *b* = standardized beta value; G = grade; C = calculations; W = word problems.

Table 4
Direct and Indirect Effects of Working Memory–Numbers, Phonological Processing, and Processing Speed on Pre-Algebraic Knowledge (n = 279)

Type of effect	Effect of											
	Working memory–numbers				Phonological processing				Processing speed			
	Path	SE	b/SE	p	Path	SE	b/SE	p	Path	SE	b/SE	p
Direct												
Total indirect	.052	.029	1.76	.078	.099	.029	3.37	.001	.089	.028	3.22	.001
Via G2C	.000	.000	0.05	.961	.001	.007	0.11	.913	.002	.015	0.11	.914
G2W	.001	.007	0.20	.839	.002	.008	0.29	.770	.006	.007	0.83	.408
G3C	.042	.021	1.99	.047	.048	.019	2.58	.010	.026	.019	1.37	.171
G3W	.004	.008	0.50	.615	.016	.011	1.40	.161	.002	.008	0.30	.762

Note. Working memory–numbers are Counting Recall from the Working Memory Test Battery for Children. Phonological processing is the Comprehensive Test of Phonological Processing–Sound Matching. Processing speed is the Woodcock–Johnson III Visual Matching. G2C is single-digit addition. G2W is story problems. G3C is a composite score across single-digit addition and the Double-Digit Addition and Double-Digit Subtraction Tests. G3W is the Iowa Test of Basic Skills–Problem Solving and Data Interpretation. *b* = standardized beta value; G = grade; C = calculations; W = word problems.

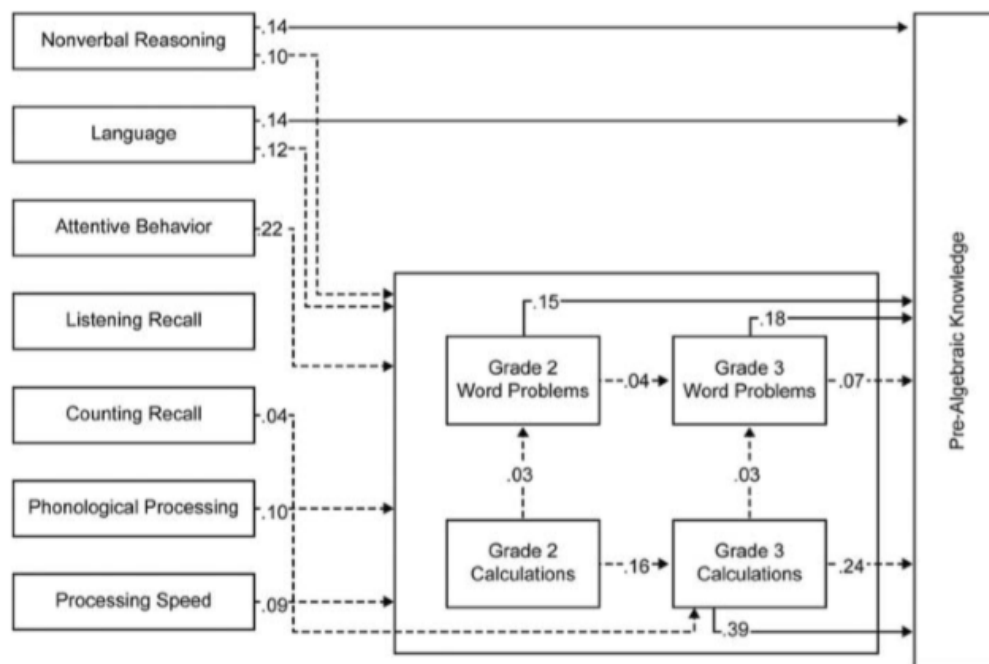


Figure 1. Trimmed model showing significant direct (solid lines) and indirect (broken lines) effects on pre-algebraic knowledge. Abilities in the first column were measured at beginning of second grade, as was the case for second-grade calculations and word problems. Pre-algebraic knowledge was measured in the spring of third grade, as was the case for third-grade word problems and calculations.

7. Discussion

算数と一般領域の認知資源が、プレ代数知識についての個人差の重要な貢献になっている。

7.1 The Role of Arithmetic Competence

小学 2 年生の文章問題スキルからプレ代数への直接的なパスが存在するが、計算の流暢性からは存在しない。

小学 2 年生における計算の流暢性による個人差は、プレ代数のスコアを予測する。しかし、それらの効果は間接的なだけである。

小学 3 年生において、計算の流暢性のほうが文章問題スキルよりも強くなってしまっている。

7.2 The Role of Domain-General Cognitive Resources

プレ代数学において効果があるのは、非言語意味理解と言語についてであった。

代数学に関連しそうな注意深い行動やワーキングメモリの、プレ代数学への直接的な有意な効果は見られなかった。

音韻処理や処理速度も間接的な有意な効果だけが見られた。

7.3 Limitations and Conclusions

今回の研究には以下のような制限がある。

- 1) 非標準的な等式や関数表以外にもプレ代数知識を測定する方法を試していない
- 2) 今回は一般領域の認知資源のそれぞれの構築だけを測定した
- 3) 外的妥当性を制限し、低所得およびアフリカ系アメリカ人の子供たちをオーバーサンプリングしている
- 4) 今回の研究では未知数を x としたが、先行研究ではこの年齢層においては、箱やブロックを用いた例もある
- 5) 関係の予想には、(プレ代数知識への) 経路の相関によって検査を行っているので、因果関係についての結論は避けるべきである