

Physically Distributed Learning: Adapting and Reinterpreting Physical Environments in the Development of Fraction Concepts

Martin, T. & Schwartz, D. L.

(2005). *Cognitive Science*, Vol. 29, pp. 587-625

Introduction

- 物理的活動は、抽象的な概念の学習をどのように促進させているのか？
 - 教育環境では、物理的な操作が学習を促進する
(Chao, Stigler, & Woodward, 2000)
 - 子供は、物体に触れることで正確に数を数えることができる
(Alibali & DiRusso, 1999; Case & Okamoto, 1996)
 - 子供は、コンピュータグラフを使用することで2次元空間の概念を発達させる
(Sarama, Clements, Swaminathan, McMillen, & Gonzalez Gomez, 2003)
- この論文では、物理的活動がどのように抽象的な概念の学習を促進させるか検討を行う

Research on learning through physical action

- Fig. 1 は、物理的活動が思考や学習を促進させる4つの方法を示している
 - Ideas
 - ◇ Adaptable : 人間は定まったアイデアを持っていない
 - ◇ Stable : 人間は定まったアイデアを持っている
 - Environment
 - ◇ Adaptable : 環境は理想的ではない
 - ◇ Stable : 環境は良構造であり、理想的である

1. Induction

- 物理的活動を通して環境における規則性を理解できる (Greeno, 1988)
 - ◇ 容器を変えても水の量は不変
 - ◇ 見る方向を変えても長方形の紙は長方形のまま

2. Off-loading

- 環境を利用して認知的負荷を削減できる
 - ◇ このような活動は分散認知として示されている
(Hutchins, 1995a; Norman, 1988; Zhang & Norman, 1994)

3. Repurpose

- 物理的活動によって環境を変化させることができる (Kirsh, 1996)
 - ◇ 必要なときにスクリュードライバーがない
 - ◇ ナイフで代替する、スクリュードライバーを作る

4. Physically Distributed Learning

- 環境への適応を通して、環境に対する新しい解釈が生じる
⇒ 抽象的な概念の学習につながる

PDL for fraction concepts

- 9-10 歳児に、ピース(積み木?)を動かして「8 の 1/4 をつくる」という問題を出題 (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1993)
- Fig. 2 は、「8 の 1/4 をつくる」という問題における典型的な環境への適応と再解釈を示す
 - a. 子供は 1 つのピースを 1 として解釈
 - b. 子供は 1 つのピースを 1 グループの中の 1 つ(1/4)として解釈
 - c. 2 つのピースで構成される 4 つのグループを生成
子供は 1 グループ(2 つのピース)が「8 の 1/4」であると解釈

Experimental Overview

- Fig. 2 と同様の課題を使用して 5 つの実験を実施
 - 実験 1, 2: ピースを動かすことができる/できない状況で問題解決パフォーマンスを比較
 - 実験 3: 事前知識とピースの形状との関係について検討
 - 実験 4, 5: 転移問題を使用して学習効果について検討

Experiment 1: Effects of action

- 問題: 「8 の 1/4 をつくる」
 - Fig. 3 は, 実験 1-5 で使用されたピース
- 実験 1 の目的
 - 以下 2 条件の問題解決パフォーマンスを比較
 - ◇ 物理条件: ピースを物理的に動かすことができる
 - ◇ 絵条件: ピースの描かれた絵を渡される
 - ペンで線等を書き込めるが, ピースを物理的に動かすことはできない

Methods

- 参加者
 - 分数の足し算までを学習している 9-10 歳児 32 名
- 実験デザイン
 - 材料要因: 物理/絵—参加者内
 - ピース要因: パイピース/タイルピース—参加者内
 - ◇ 2×2 の参加者内要因計画
- 手順
 - 子供たちは, 実験者同席のもと個別に実験課題に取り組んだ
 - 課題の制限時間はなく, 実験者が答えを教えることはなかった

- 子供たちが答えを決定した時点で課題終了
- 問題表象の順序は参加者間でカウンターバランスがとられた
- 問題解決パフォーマンスのコーディング
 - 理解：口頭による解答で“2”と答えると正解
 - 適応：8つのピースが4等分されていれば正解 (Fig. 4 左)

Results

- Table 1 は、各条件における問題解決パフォーマンスの結果
 - パイとタイルとの間に優位差がなかった
 - ◇ 理解/適応：パイとタイルで各1点の2点満点で採点
 - 理解/適応の点数に関して2×2の分散分析
 - ◇ 材料要因の主効果あり：物理 > 絵
 - 理解の割合： $F(1, 26)=37.1, p<.001$
 - 適応の割合： $F(1, 26)=64.8, p<.001$
 - ピースの形状に関わらず、物理的に操作できる方が正しい理解と適応を促す
- 詳細分析
 - 適応できた子供の内56%は正しい理解ができなかった
 - 適応できなくても正しく理解する子供もいた
 - ◇ 正しく適応しても正しく理解できるわけではない

Discussion

- 子供たちは、絵に書き込むよりも、ピースを動かした方が正しい理解をすることができた
 - ピースを動かすことによって、子供は環境に適応し、その過程で再解釈が行われた
 - ◇ 個別のピースをグループとしてみるようになった
- 正しく環境に適応できても、正しい理解ができない子供もいた
 - 物理的操作の有効性がないという可能性も考えられる
 - ◇ 疑義1：ピースを動かす場合、問題解決プランを実行しやすかったのでは？
 - ◇ 疑義2：絵に書き込む場合、内的にピースを動かすことが困難なのでは？
 - ・ これらの疑義について実験2で検討を行う

Experiment 2: Effects of Action II

- 実験2の目的
 - 物理操作の有効性について検討

Methods

- 参加者
 - 分数計算の学習はしたことがない9-10歳児20名
- 新しい実験要因
 - 文脈要因

- ◇ 子供たちには分数問題と文章題を出題
 - 分数問題：ピースを使って8の1/4をつくる（実験1と同じ）
 - 文章題：8つのピースを4人に均等に分配すると、1人何個のピースを受け取るか？
 - ◇ 問題の難易度
 - 日常的文脈で示される文章題の方が容易
 - 日常的知識は、問題解決活動に制約を与え、問題への理解を促進する (Empson, 1999; Streefland, 1993)
 - ◇ 予測
 - 分数問題は、物理条件でも絵条件でも解くことはできない
 - ピースを分割，グループ化する知識が子供たちにはない
 - 文章題は、物理条件でのみ解くことができる
 - ピースを物理的に動かすことで再解釈が促進される

疑義1の棄却
 - ピースの配置要因
 - ◇ 問題を与えられたときのピースの配置
 - ランダム／正解の状態 (Fig. 5)
 - ◇ 予測
 - ランダムよりも正解の状態のとき，理解が促進される
 - 認知負荷が削減され，理解が促進される
 - ランダムでも正解の状態でも理解の度合いに差はない
 - ピースを物理的に動かすことが理解を促進する

疑義2の棄却
 - 実験デザイン
 - 3つの要因を設けた
 - ◇ 文脈要因：分数問題/文章題—参加者間
 - ◇ 材料要因：物理/絵—参加者内
 - ◇ ピースの配置要因：ランダム/正解—参加者内
 - $2 \times 2 \times 2$ の混合要因計画
 - 手順
 - 基本的に実験1と同じ
 - 参加者の半数は分数問題を行い，もう半数は文章題を行った
 - 各問題表象(物理/絵，ランダム/正解)の順序はカウンターバランスがとられた
- Results*
- Fig. 6は，各文脈における物理条件と絵条件の問題解決パフォーマンスの結果
 - 文章題

- ◇ 物理条件と絵条件の両方で 100%に近い適応
- ◇ 物理条件の方が理解度は高い
 - 物理的に動かすことが理解を促進させる
- 分数問題
 - ◇ 理解/適応に関して、物理条件と絵条件の有意差はみられなかった
 - 疑義 1 を棄却
- Fig. 7 は、各文脈におけるランダム条件と正解条件の問題解決パフォーマンスの結果
 - 文章題と分数問題
 - ◇ 理解/適応に関して、ランダム条件と正解条件の有意差はみられなかった
 - 問題を与えられたときのピースの配置は理解/適応に影響しない
疑義 2 の棄却
- 理解/適応の分析 (Table 3)
 - 理解/適応の割合に関してロジスティックモデルを使用した分析を行った
(ロジスティック近似を行った後にカイ二乗?)
 - ◇ 主効果, 交互作用について検討
 - 文脈要因に有意差あり: 文章題 > 分数問題
理解の割合: $\chi^2(1)=12.4, p<.001$
適応の割合: $\chi^2(1)=15.3, p<.001$
 - 理解についてのみ材料要因に有意差あり: 物理 > 絵
理解の割合: $\chi^2(1)=12.4, p<.001$
 - 理解, 適応について材料要因の有意差なし: ランダム \approx 正解
 - ロジスティックモデルから, 交互作用に関する説明は得られなかった
- 詳細分析
 - 適応できた子供の内 54%は正しい理解ができなかった
 - ◇ 最初から正解の状態が与えられても, 正しく理解できるわけではない
 - 物理的に動かすことが理解の促進につながると考えられる

Discussion

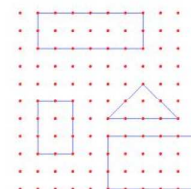
- 実験 2 では、疑義 1, 2 が棄却され、ピースを動かすことの有効性が示された
- 物理的操作の何が有効なのか
 - 物理的にピースを動かすことによって、最初の解釈から離れることができる
 - 最初の解釈から離れることができれば、新しい解釈を行いやすくなる
 - ◇ 個別のピースをグループ化しやすくなる
 - 子供たちは、正解が与えられた問題よりも、自ら労力をかけて解決した問題を深く理解する (Bransford, Franks, Vye, & Sherwood, 1989)
 - ピースを動かしながら、偶然にでも、ピースが正解の状態に至ったときに、正しい理解を行うことができる

Experiment 3: Effects of knowledge

- 実験3の目的
 - 事前知識と環境への適応との関係について検討
 - ◇ 問題に関する知識があれば、環境に依存せずに問題を解決することができる
 - ◇ 問題に関する知識がなければ、環境の構造に依存する傾向がみられる

Methods

- 参加者
 - かけ算と分数の足し算の一部を学習している10-11歳児16名
- 実験要因
 - 課題要因：知識高/低
 - ◇ 知識高：かけ算の問題，知識低：分数足し算の問題
 - ・ 小学校5年生には、実験1, 2の問題よりも分数足し算の方が難しい
 - ・ 事前のテスト：かけ算の暗算93%正解，分数足し算の暗算13%正解
 - 材料要因：unit/partitioned
 - ◇ unit：タイルピース，ビーンズ
 - ◇ partitioned：パイピース，ジオボード → グループ化しやすい
 - ・ パイピースでは、サブパーツの組み合わせを全体として捉えやすい
 - ・ ジオボードでは、サブパーツをグループとしてマーキングしやすい
 - 予測
 - ◇ かけ算の問題ではunit/partitionedに関わらず正解が多い
 - ◇ 分数足し算の問題では、unitよりもpartitionedで正解が多い
- 実験デザイン
 - 課題要因：知識高/低—参加者内
 - 材料要因：unit/partitioned—参加者内
 - ◇ 2×2の参加者内要因計画
- 手順
 - 基本的に実験1と同じ
 - 課題
 - ◇ かけ算の問題は、1桁同士または2桁と1桁のかけ算
 - ◇ 分数足し算の問題では、分子は1，一方の分母の倍数をもう一方の分母に使用（例： $1/4 + 1/8$ ）
 - 問題の種類，材料の順序は参加者間でカウンターバランスがとられた
- 問題解決パフォーマンスのコーディング
 - 理解：口頭による正解
 - 適応：材料による正解 (Fig. 8)



Results

- 理解/適応
 - unit 条件のタイルとビーンズで各 1 点の 2 点満点
 - partitioned 条件のパイとジオボードで各 1 点の 2 点満点
 - ◇ Table 5 は採点の結果
- 理解の点数に関して 2×2 の分散分析
 - 課題要因の主効果あり：知識高(かけ算) > 知識低(分数足し算)
($F(1, 12)=30.5, p<.001$)
 - 材料の主効果, 交互作用はみられなかった
- 適応の点数に関して 2×2 の分散分析
 - 課題要因の主効果あり：知識高(かけ算) > 知識低(分数足し算)
($F(1, 10)=83.1, p<.001$)
 - 材料要因の主効果あり：partitioned > unit ($F(1, 10)=5.7, p<.05$)
 - 交互作用あり ($F(1, 10)=5.7, p<.05$)
 - ◇ 分数足し算で, partitioned の方が適応の得点が高い

Discussion

- 知識があるかけ算の問題
 - unit/partitioned に関わらず, 適切に環境を使用
 - 知識を補助するために環境を使用
- 知識のない分数足し算の問題
 - unit よりも partitioned で, 適切に環境を使用
 - 環境の構造に依存する傾向がみられた
- 正しく適応しても, 正しく理解できるわけではない
 - 実験 1, 2 と同様の結果

Experiment 4: Effects of materials

- 実験 3 では, 環境の構造は理解に影響を与えなかった
- 実験 4 の目的
 - 環境の構造が理解に及ぼす影響について検討
 - ◇ 転移問題を設けて学習効果をみる

Methods

- 参加者
 - 10-11 歳児 16 名
- 問題
 - 分数足し算の問題を使用
 - 実験は 3 日間行い, 1 日ごとに学習フェーズと問題解決フェーズを設けた
- 実験要因

- 学習フェーズでの材料：タイルピース/パイピース—参加者間
- 問題解決フェーズでの材料：ビーンズ/プラスチックの長方形/タイル or パイ—参加者内
 - ◇ プラスチックの長方形は、半分, 1/3, 1/4... に分割できる
 - ◇ パイピースと長方形では、サブパーツの組み合わせを全体として捉えやすい

● 手順

- 子供たちは、実験者同席のもと個別に実験課題に取り組んだ
- 20分間学習フェーズを実施
 - ◇ Level1 からできる限り高い Level の問題を行う (Table 6)
 - ◇ まず口頭で問題を解答
 - ◇ タイルまたはパイを使用して問題を解答
 - ◇ 不正解の場合、実験者がフィードバックを提示
 - 同じ問題で不正解が連続するとフィードバックの Level が上がる (Fig. 9)
 - ◇ フィードバックなしで 2 問連続正解した場合、次の Level の問題を実施
- 10分間問題解決フェーズを実施
 - ◇ 学習フェーズで解答できた各 Level の問題を出題
 - ◇ タイルで学習した子供は、パイ, ビーンズ, 長方形で問題を解決
 - ◇ パイで学習した子供は、タイル, ビーンズ, 長方形で問題を解決
 - ◇ フィードバックは与えない
 - ◇ 材料の順序は参加者間でカウンターバランスがとられた

Results

● 学習フェーズのパフォーマンス

- Level1~6 を点数化し、6 点満点で採点
 - ◇ Table 7 は採点の結果
 - 日数が増すごとに点数が増加 ($F(2, 28)=21.5, p<0.01$)
 - タイルとパイに有意差はなかった
- タイルとパイ条件で提示された各 Level のフィードバックの割合 (Table 8)
 - ◇ タイルとパイに有意差はなかった
 - ◇ Level1 フィードバック(正解の状態をみせるだけ)が学習に有効であった

● 問題解決フェーズのパフォーマンス

- 2つの指標を用いる
 - ◇ **problem solving transfer**
 - 学習フェーズでピースを使用せずに口頭で正答した Level の問題を問題解決フェーズで正答(理解)した割合
 - ◇ **learning at transfer**
 - 学習フェーズでピースを使用せずに口頭で不正解だった Level の問題を

問題解決フェーズで正答(理解)した割合

- Fig. 10 は, **problem solving transfer** と **learning at transfer** の結果
 - ◇ **problem solving transfer**
 - タイル : 95%, パイ : 89%
 - ◇ **learning at transfer**
 - タイル : 55%, パイ : 35%
- 正答率に関して, **2(学習フェーズの材料:タイル/パイ)×2(transfer:problem solving transfer/learning at transfer)**の分散分析
 - ◇ 学習フェーズの材料要因の主効果あり
 - タイル > パイ ($F(1, 14)=12.0, p<0.1$)
 - タイルで学習した場合, 他の材料で問題を解きやすくなる
 - ◇ **transfer** 要因の主効果あり
 - **problem solving transfer > learning at transfer** ($F(1, 14)=107.1, p<0.01$)
 - 知識がある場合, 環境を上手く利用 (実験 3 と同様の結果)
- 詳細分析
 - Table 9 は, タイルとパイ条件における正しく適応/理解できた割合
 - ◇ **transfer type** はつぶされている
 - 正しく適応できた割合に関して, **2(学習フェーズの材料:タイル/パイ)×3(問題解決フェーズの材料:長方形/タイル or パイ/ビーンズ)×3(日にち)**の分散分析
 - ◇ 学習フェーズの材料要因の主効果あり
 - タイル > パイ ($F(1, 14)=7.4, p<0.5$)

Discussion

- パイよりもタイルで学習した場合, 問題解決フェーズで環境を上手く利用できた
 - タイルを使用した子供たち
 - ◇ 個別のピースをグループとして再解釈する必要があった
 - ◇ タイルで学習した場合, この再解釈の方法を他の材料に適応することができた
 - 問題解決が容易にできる環境が学習に良いとはいえない

Experiment 5: Effects of materials II

- 実験 4 におけるパイ条件の学習フェーズでの学習法に問題があった可能性
 - 実験 4 では, パイの比率が明確に示されていなかった
 - 実験 5 では, 明確に示して実験 4 の追試を行う (Fig. 11)

Methods

- 参加者
 - 9-10 歳児 9 名
- 実験デザインと手順

- 子供たちは3日間、タイルまたはパイで分数足し算の問題を学習
- 4日目に、両方の材料で分数足し算の問題を解答
- 問題の Level やフィードバックの与え方は実験4と同じ

Results

- Table 10 は、タイルとパイ条件における正しく適応/理解できた割合（4日目の成績）
 - 適応/理解できた割合に関して、 $2(\text{学習フェーズの材料：タイル/パイ}) \times 2(\text{問題解決フェーズの材料：親密な材料/親密でない材料})$ の分散分析
 - 理解
 - ◇ 学習フェーズの材料要因に主効果なし
 - ◇ 問題解決フェーズの材料要因に主効果あり
 - ・ 親密 > 親密でない ($F(1, 30)=6.3, p<0.5$)
 - ◇ 交互作用あり ($F(1, 30)=6.3, p<0.5$)
 - ・ タイルで学習した子供たちは、材料の親密性に影響を受けない
 - ・ パイで学習した子供たちは、親密な材料(パイ)で理解が促進される ($F(1, 30)=13.4, p<0.1$)
 - 適応
 - ◇ 学習フェーズの材料要因に主効果なし
 - ◇ 問題解決フェーズの材料要因に主効果あり
 - ・ 親密 > 親密でない ($F(1, 30)=57.2, p<0.01$)
 - ◇ 交互作用あり ($F(1, 30)=17.8, p<0.01$)
 - ・ タイルで学習した子供たちは、材料の親密性に影響を受けない
 - ・ パイで学習した子供たちは、親密な材料(パイ)で適応が促進される ($F(1, 30)=6.2, p<0.5$)

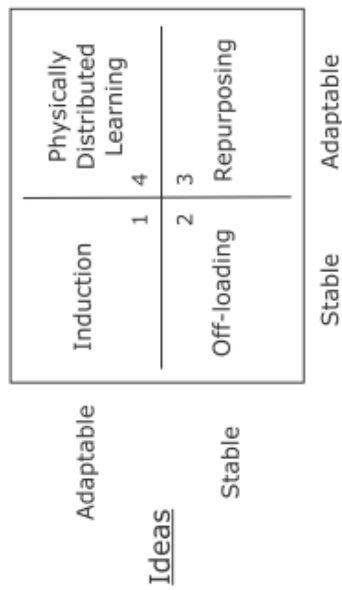
Discussion

- パイ条件の学習フェーズでの学習法を修正しても、実験4と同様の結果が得られた

General discussion

- 5つの実験で、子供たちは、環境の構造を変化させ、その過程で環境の構造を再解釈した
 - Fig. 12 は、実験4における問題解決フェーズの適応/理解の関係を示した図
 - ◇ 縦軸は問題解決フェーズで3つの材料を使用したときの理解度
 - ・ 0(一番下)～3(一番上)
 - ◇ 横軸は問題解決フェーズで3つの材料を使用したときの適応度
 - ・ 0(一番左)～3(一番右)
 - ◇ 矢印は、前の日から次の日にかけての遷移を示す
 - タイルを使用した場合、完全な適応、理解に落ち着く
 - パイを使用した場合、右上に向かう傾向はあるけれど、右上に落ち着いた数は少ない

- タイルを使用した場合、先に適応度が上昇して、その後に理解度が上昇
 - ◇ 環境へ適応することによって、正しい理解が行われる
- 物理的操作の有効性
 - 数学的法則の理解には、様々な表象を使用することが有効
 - ◇ コンピュータを使用したヴァーチャルな環境でも、ものを動かして、数学を学習することは有効 (Ainsworth, Bibby, & Wood, 2002; Clements, 2002; Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002)
 - 単に答えを示すだけでは、子供たちは積極性を無くし、深い理解を得られない
 - ◇ 物理的操作は環境に量的構造を与え、子供たちはその環境への理解を発達させる
 - ◇ 必ずしも理解できるとは限らないが、理解を手助けすることができる



Environment

Fig. 1. Physical actions and learning. We distinguished four ways actions could support learning. Ideas and environments can be stable or adaptable. We presume these dimensions are continuous, but represent them in discrete quadrants for clarity in discussion.

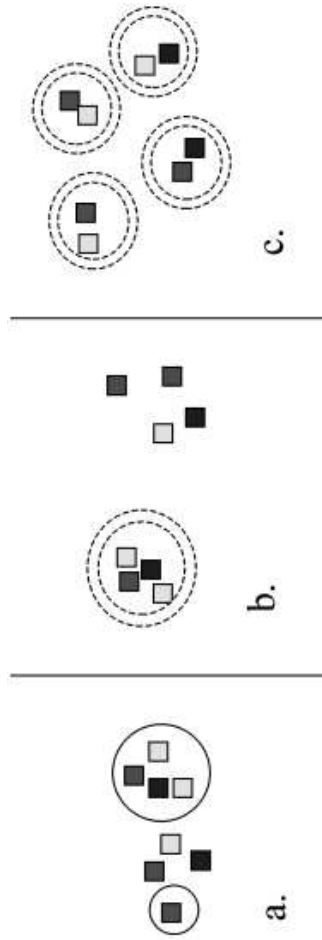


Fig. 2. Typical configurations and interpretations for the problem of "Make $\frac{1}{4}$ of 8." Panel 2a shows two collections, one of one piece and one of four pieces, that are interpreted as two separate whole numbers. 2b shows a partitioning into two groups of four. The interpretation is that one group of four pieces is one-fourth of the total. 2c shows partitioning into four equal groups. In 2c, each partition is correctly interpreted as one group of two pieces.

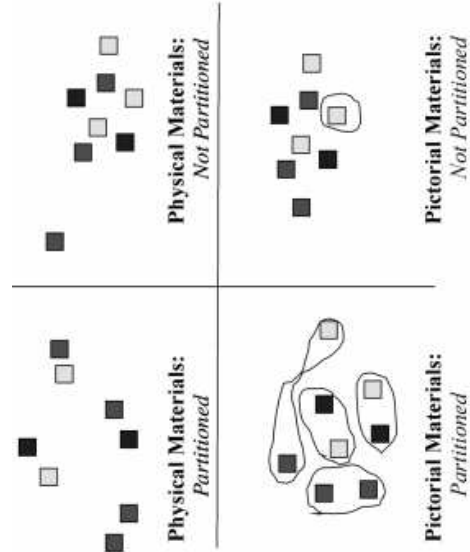


Fig. 4. Examples of partitioned and nonpartitioned adaptations of $\frac{1}{4}$ of 8. The left panels show partitioned adaptations, created with physical materials and with pictures. In both cases, the set of eight pieces is divided into four equal groups of two. The right panels give examples of nonpartitioned adaptations. In both cases, the set is not partitioned equally, and instead one piece is isolated.

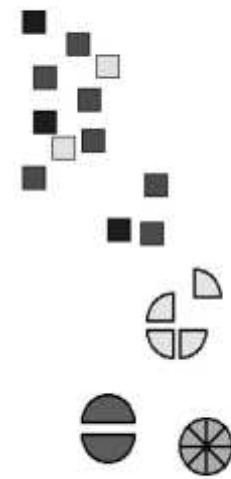


Fig. 3. Pie and tile manipulatives. Materials used in Experiments 1 to 5.

Table 1
Percent of good interpretations and adaptations by materials

Materials	Correct Interpretations	Partitioned Adaptations
Physical		
Pies (%)	59	64
Tiles (%)	81	68
Mean (%)	70	66
Pictorial		
Pies (%)	19	4
Tiles (%)	13	0
Mean (%)	16	2

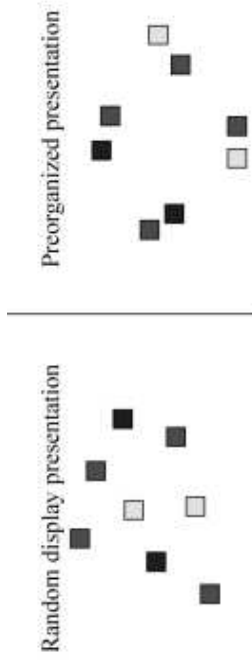


Fig. 5. Random display and preorganized material presentation for $\frac{1}{4}$ of 8. As in Experiment 1, the random display presentation lays the materials out over the space or table in an unorganized fashion. The preorganized presentation shows the materials partitioned in an effective way for solving the problem.

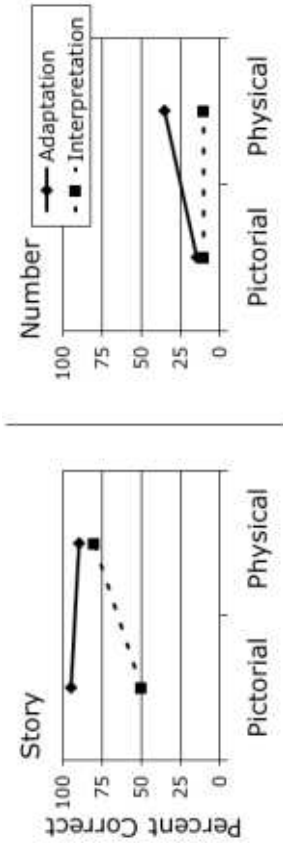


Fig. 6. Effects of material and problem context on interpretation and adaptation, Experiment 2. In Experiment 2, children in the story context made correct interpretations and partitioned adaptations more often than children in the number context with both physical and pictorial materials. Children in the story context made partitioned adaptations as often with pictorial as with physical materials, although they correctly interpreted their adaptations more often when they manipulated the pieces. Children in the number context made partitioned adaptations more often with the physical materials, but this did not improve their interpretations.

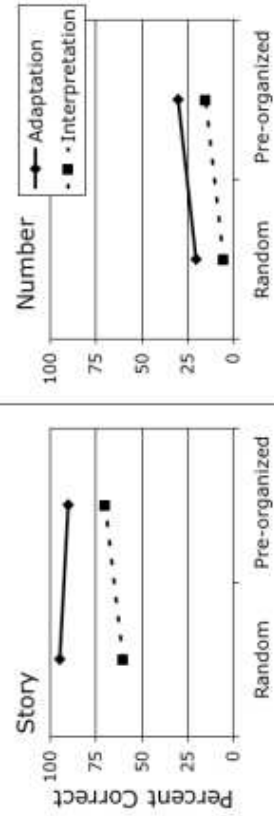


Fig. 7. Effects of display organization and problem context on interpretation and adaptation, Experiment 2. In Experiment 2, children in the story context made correct interpretations and partitioned adaptations more often than children in the number context with both random and organized presentation of the materials. Children in the story context made partitioned adaptations as often with random and organized presentation of the materials, although they correctly interpreted their adaptations slightly more often with the organized presentation of the materials. Children in the number context made partitioned adaptations and interpreted them correctly with similar frequency with both presentations.

Table 5
Average number of good interpretations and adaptations (out of 2 possible) broken out by problem type and material

Knowledge/Materials	Correct Interpretations (SE)	Partitioned Adaptations (SE)
High Knowledge (Multiply)		
Partitioned materials	1.2 (0.1)	2.0 (0.0)
Unit materials	1.4 (0.2)	2.0 (0.0)
Low knowledge (add fractions)		
Partitioned materials	0.4 (0.2)	0.6 (0.2)
Unit materials	0.4 (0.2)	0.2 (0.2)

Table 3
Measures broken out by problem context, material, and organization

Condition	Correct Interpretations	Partitioned Adaptations	Moves (SE)	Restarts (SE)
Number ($n = 10$)				
Physical				
Random display	10%	30%	22.2 (6.5)	1.5 (0.3)
Preorganized	10%	40%	17.6 (3.7)	1.3 (0.2)
Pictorial				
Random display	0%	10%	27.4 (12.7)	1.2 (0.2)
Preorganized	20%	20%	22.9 (7.9)	1.1 (0.1)
Story ($n = 10$)				
Physical				
Random display	80%	90%	27.4 (9.7)	1.4 (0.2)
Preorganized	80%	90%	22.6 (5.5)	1.3 (0.3)
Pictorial				
Random display	40%	100%	43.7 (14.5)	1.3 (0.3)
Preorganized	60%	90%	22.8 (8.4)	1.1 (0.1)

Table 6
Problem levels, Experiment 4

Sum	Same Denominator	Multiples Denominators	Different Denominators
Sum < 1	Level 1 (e.g., $2/4 + 1/4$)	Level 3 (e.g., $1/12 + 5/6$)	Level 5 (e.g., $1/4 + 1/3$)
Sum > 1	Level 2 (e.g., $2/3 + 2/3$)	Level 4 (e.g., $2/4 + 5/8$)	Level 6 (e.g., $2/3 + 3/4$)

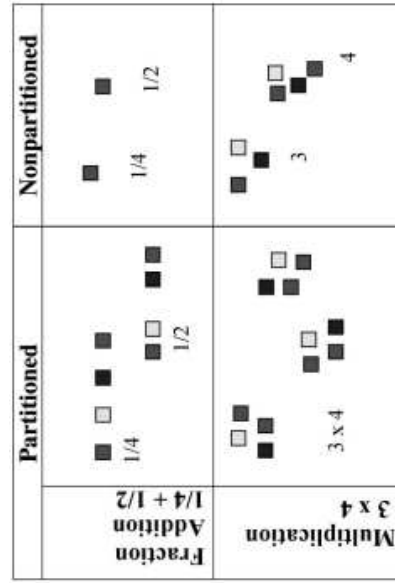


Fig. 8. Adaptations for fraction addition and multiplication, Experiment 3. A partitioned adaptation for $1/4 + 1/2$ shows partitioned representations of the two fractions. A nonpartitioned adaptation for fraction addition might show $1/4$ as one piece and $1/2$ as one piece. A partitioned adaptation for 3×4 shows three groups of four pieces each. A nonpartitioned adaptation might show direct representations of the numbers in the problem (e.g., 3 and 4).

Table 8
Level of instructional feedback as a percentage of total feedback, Experiment 4

Group	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4
Tiles (%)	47	22	25	6
Pies (%)	55	21	21	3

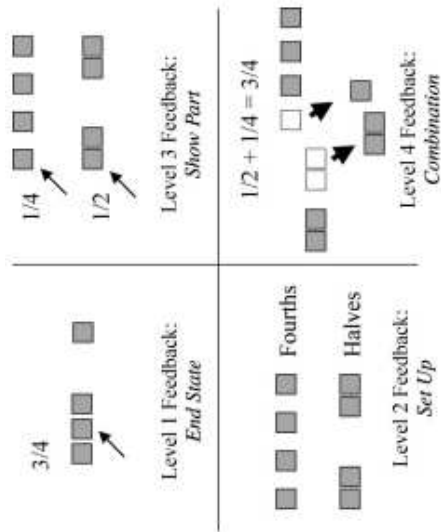


Fig. 9. Feedback levels, Experiment 4. For example, for the problem $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, Level 1 showed children the end state and stated, "The answer is $\frac{3}{4}$." Level 2 showed children how to setup the fractions in the problem, "Use four pieces to make both halves and fourths." Level 3 indicated what part showed the particular fraction, "Here's one whole, and here's one fourth of it. Here's another whole, and here's one half of it." Level 4 modeled the addition process, "Put the $\frac{1}{4}$ and the $\frac{1}{2}$ together to get $\frac{3}{4}$."

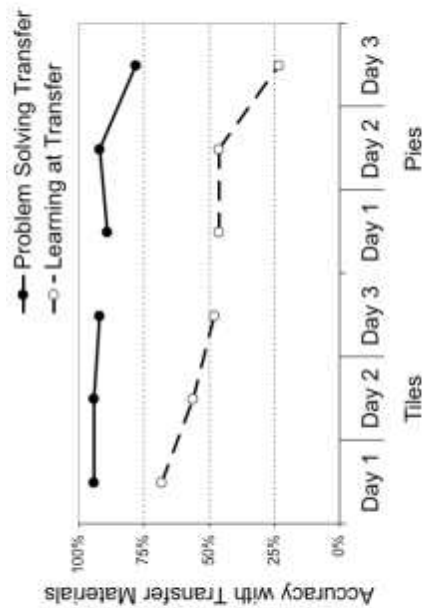


Fig. 10. Transfer by condition, day, and ability to solve problems mentally. Experiment 4. Problem-solving transfer problems are those that children could solve without materials. Learning-at-transfer problems are those that children had not yet successfully solved without materials. Both the pie and tile groups performed better at transfer on problem-solving problems. The pie group performed worse than the tile group on learning-at-transfer problems.

Table 7
Highest problem level passed, learning phase, Experiment 4

Group	Day 1 (SE)	Day 2 (SE)	Day 3 (SE)
Tiles	1.63 (.25)	2.75 (.29)	3.00 (.43)
Pies	0.88 (.28)	1.75 (.39)	2.75 (.23)

Table 9
Proportion of good interpretations and adaptations at transfer by condition and material, Experiment 4

Day/Material	Correct Interpretations		Partitioned Adaptations	
	Tiles (SE)	Pies (SE)	Tiles (SE)	Pies (SE)
Day 1				
Bars	.8 (.1)	.5 (.1)	.8 (.1)	.5 (.1)
Other	.8 (.1)	.7 (.2)	.8 (.1)	.3 (.1)
Beans	.8 (.1)	.7 (.1)	.9 (.2)	.6 (.2)
M	.80	.63	.83	.47
Day 2				
Bars	.8 (.1)	.8 (.1)	.9 (.1)	.7 (.1)
Other	.6 (.0)	.8 (.1)	.9 (.1)	.6 (.1)
Beans	.7 (.0)	.8 (.1)	1.0 (.1)	.8 (.1)
M	.70	.80	.93	.70
Day 3				
Bars	.7 (.1)	.6 (.1)	.9 (.1)	.7 (.1)
Other	.7 (.1)	.5 (.1)	.9 (.1)	.5 (.1)
Beans	.8 (.1)	.5 (.1)	1.0 (.1)	.5 (.1)
M	.73	.53	.93	.57

Table 10
Proportion of good interpretations and adaptations at transfer by condition and material, Experiment 5

	Correct Interpretations (SE)	Partitioned Adaptations (SE)
Learned With Tiles		
Familiar materials (tiles)	1.1 (0.1)	1.6 (0.2)
Unfamiliar materials (pies)	1.1 (0.1)	1.2 (0.2)
Learned with pies		
Familiar materials (pies)	1.5 (0.1)	2.0 (0.0)
Unfamiliar materials (tiles)	0.9 (0.1)	0.6 (0.2)

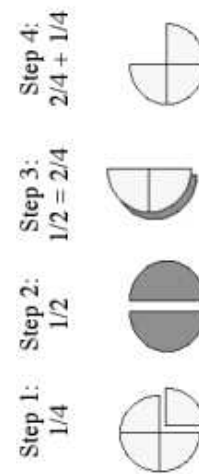


Fig. 11. Pie trading method for $1/4 + 1/2$. In Step 1, we showed how to find the pieces that fit four into one whole circle and take out one of them to make $1/4$. In Step 2, we showed students how to find the pieces that fit two into one whole circle and take out one of them to make $1/2$. In Step 3, we showed students how to fit fourths into the half to find out how many of them to trade. Finally, in Step 4, we showed students how to put all the fourths together to get $3/4$.

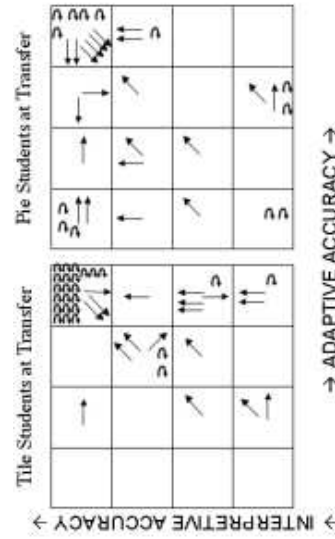


Fig. 12. Movement through the space of interpretive and adaptive accuracy in the transfer phase of Experiment 4. A straight arrow indicates a change in either adaptive or interpretive accuracy from one day to the next. A diagonal arrow indicates a change in both adaptive and interpretive accuracy. A curved arrow indicates no change in either adaptive or interpretive accuracy. See text for a detailed explanation of the figure.