

# Electrifying diagrams for learning: principles for complex representational systems

Chen, P. C.-H.

Cognitive Science, Vol. 26, pp. 685-736. (2002)

## Introduction

- 良い表象
  - 推論や問題解決の能力を向上させる
  - 科学現象の理解や学習を促す
- 良い表象とは何か？
  - 認知科学の重要な問題
    - ◇ 同型問題 (Kotovsky, Hayes, & Simon, 1985)
      - 表象が異なれば問題の難易度が異なる
    - ◇ 図の利用 (Glasgow, Narayanan, & Chandrasekaran, 1995; Peterson, 1996)
      - 推論や問題解決に有効である
    - ◇ 文章を図化する効果 (Larkin & Simon, 1987)
      - 知覚操作を利用して情報を認識することができる
      - 情報の探索を容易にする
    - ◇ エキスパートの表象 (Chi, Glaser, & Farr, 1988; Ericsson & Smith, 1991)
      - 知識が上手く組織化, 統合化されている
      - 熟達した領域での記憶や問題解決で高いパフォーマンスを示す
    - ◇ 分散認知 (Zhang & Norman, 1994; Zhang, 1997)
      - 外的表象の性質
        - 記憶補助
        - 情報を直接的に認識できる (情報を変換する必要がない)
        - 認知プロセスに制約を与える
        - 課題の性質を変えることができる
- 今回の研究
  - 題材
    - ◇ 科学や数学の問題解決と学習における表象システムの性質について検討
  - 使用する表象システム
    - ◇ LEDs (Law Encoding Diagrams)
      - 現象の法則や要素の関連性を示す図
        - 幾何学的, トポロジー的, 空間的な構造
    - ◇ AVOW diagrams (Amps, Volts, Ohms, Watts)
      - 著者が考案

- 電気回路を示す図 (Chen, 1999a, 2000)
    - ◇ 2つの表象システムを比較
- 学習に有効な表象システムの特徴
  - (a) 抽象レベルの異なる情報が統合されている
    - ◇ 例: 現象の事例と法則との概念的なつながりが示されている
  - (b) 包括的な概念と局所的に異質な概念とが区別して統合されている
    - ◇ 表象を用いて領域の性質を直接的に表現する
    - ◇ その時, 表現に適合しない自然界の法則が現れる
      - 良い表象では, これらの概念的な違いが区別されて示される
  - (c) 異なる視点に基づく表現が統合されている
    - ◇ 良い表象には様々な視点が統合され, 視点の切り替えを促す
- 問題解決に有効な表象システムの特徴
  - (a) 適度に柔軟な表現がなされている
    - ◇ 柔軟性に欠けることも, 柔軟過ぎることもない
      - 柔軟性に欠ける表象: 問題解決プロセスの手続き(中間地点)の表現が困難
      - 柔軟過ぎる表象: 曖昧な表現や不適切な表現が含まれる
  - (b) 表現の変換手続きが容易である
    - ◇ 問題解決のコンパクトな手続きを示す
  - (c) 表現の変換手続きが一貫している
    - ◇ 問題解決の手続きの種類が少ない

## Representations for electricity—task analysis

### *Declarative knowledge of the domain*

- Table 1, 2 は電気回路とその振る舞い
  - $I$ : 電流,  $V$ : 電圧,  $P$ : パワー,  $r$ : 抵抗, Insulator: 絶縁体, Conductor: 伝導体
- 方程式
  - オームの法則, ベキ法則, キエルヒホフの法則
- Network diagram
  - 特定の値を持つ負荷を示す
  - 負荷の測定のために描かれる
- AVOW
  - $V, I, P, r$  は高さ, 幅, 面積, 傾斜を示す

### *Task analysis of typical problems*

- Table 3 は, Cheng (2000)で使用された電気回路の問題(10問)
  - シンプルな方程式で解答できる問題から概念的理解を要する問題まで

- **Blown bulb**

- Fig. 2 は電気回路を図示した問題

- 「電球 A が切れた場合、電球 B, C の明るさはどのように変化するか？」

- 手続き

- (a) 電気回路の最初の状態を決定する
- (b) 電球 A が切れた後の状態を決定する
- (c) 最初と後の状態を比較する

- Table 4 は方程式を使用した解法

- ◇ step 1~7: 各電球で使用されるパワーを求める
- ◇ step 8~13: 電球 B, C だけで使用されるパワーを求める
- ◇ step 14: 電球 A が切れる前後のパワーを比較

- Table 5 は AVOW を使用した解法 (Fig. 2 の電球 B が切れた場合)

- ◇ step 1: AVOW を図化 (Fig. 3a)
- ◇ step 2:  $r_b$  が切れた状態を描く (Fig. 3b)
- ◇ step 3:  $r_a$  のサイズを  $r_c$  に合わせて調整 (Fig. 3c)
- ◇ step 4: 図全体を最初の状態と同じ高さに調整 (Fig. 3d)
- ◇ step 5: 電球 B が切れた前後の状態を比較

- ステップ数が少ないという点で、AVOW を使用した方が容易

- **Cube of bulbs**

- Fig. 4 は 3 次元の電気回路を図示した問題

- 「全体の抵抗を測定せよ」

- Table 6 は方程式を使用した解法

- ◇ step 1: 3 次元イメージを 2 次元イメージに変換 (Fig. 5a)
- ◇ step 2: 回線が交錯している → 特殊な方法が必要
- ◇ step 3: 電気回路を再概念化する (Fig. 5b)
- ◇ step 4~6: 方程式を適用する

- Table 7 は AVOW を使用した解法

- ◇ step 1: ボックス a, b, c を並列に並べる (Fig. 6a)
- ◇ step 2: ボックス a にボックス d, e を付随させる (Fig. 6b)
- ◇ step 3: 同様に、ボックス b, c にもボックス f, g, h, i を付随させる (Fig. 6b)
- ◇ step 4: ボックス f, g にボックス j を付随させる (Fig. 6c)
- ◇ step 5: 同様に、ボックス g, h にボックス k を付随させる (Fig. 6c)
- ◇ step 6: ボックス d, i にボックス l を分割して付随させる (Fig. 6d)
- ◇ step 7: 高さから全体の抵抗を測定する

- 認知負荷が少ない解法という点で、AVOW を使用した方が容易
  - 方程式の場合、特に Fig.5a から 5b への変換が困難

- AVOW の場合, Fig. 6c から 6d への変換は, 図の構造がヒントとなり容易
- Overall comparison (Chen, 2000)
  - Table 8 は, Table 3 の問題の平均解決ステップ数
    - ✧ 方程式を使用した場合, AVOW を使用した場合よりも, ステップ数が約 2 倍多い
  - Table 9 は, 方程式と AVOW を使用した解法の比較
    - ✧ AVOW を使用した場合
      - 宣言的知識
        - 宣言的知識の使用が少ない (1.1)
        - 図が積極的に(1.2, 1.3), 均等に(1.4)使用された
      - ステップと手続き
        - 問題を明確化させる手続きが少ない (2.1)
        - 解決までのステップ数が少ない (2.2, 2.3)
        - 解決までの手続きが少ない (2.4, 2.5)
        - 各問題を明確化させるステップが均等 (2.6)
        - 一般的手続きを使用することが少ない (2.7)
      - ステップと知識
        - 問題解決には直接影響はしない表現の操作が多い (3.1)

### Learning experiment

- 実験
  - 電気回路の基礎を学習するミニカリキュラムが行われた
  - 方程式もしくは AVOW を使用して学習 (Appendix A, B)
  - 方程式グループと AVOW グループの学習, 問題解決を比較
    - ✧ 授業で使用する表象だけが異なる

### Participants

- 2 グループ
  - 方程式グループ, AVOW グループ
- 参加者 24 名(平均 16~23 歳)
  - 学生は全員, 電気回路について学習したことがない初心者
  - 各グループで 9 名の分析可能なデータを取得

### Procedure

- セッション 1
  - 講義 50 分
    - ✧ シンプルな電気回路について

- Recall test
- MC questions の前半部
- セッション 2
  - 講義 50 分
    - ◇ 複雑な電気回路や絶縁体, 伝導体, バッテリーについて
  - MC questions の後半部
- セッション 3 (セッション 2 の 5 日後)
  - Recall test
  - MC questions
  - 転移問題
- Recall test
  - 電気回路に関して知っていることを何でも発話してください
    - ◇ 発話の範囲と正誤から理解の質を評価
    - ◇ 実験者は, generic prompt と question prompt によって発話を促す
      - generic prompt: yes?
      - question prompt: Do you remember any equations? What about different circuits?
- Multiple-choice (MC) questions
  - 電気回路の理解を評価するための問題  
(e.g., Cohen, Eylon, & Ganiel, 1983; McDermott & Shaffer, 1992)
  - 問題は 4 つのカテゴリーから成る 24 問
    - (A) 基本的な回路に関する問題
    - (B) 電流の法則を適用した関係性に関する問題
    - (C) 回路の比較が必要なインタラクションに関する問題
    - (D) 振る舞いに変化する回路の比較が必要な複雑なインタラクションに関する問題  
(Fig. 2)
- Transfer problems
  - 新規な問題を 2 問カリキュラムの最後に実施
  - String of lights problem
    - ◇ 実世界における電気回路の問題  
「問題: クリスマスツリーの電飾が 240V の電源につながれている. 各電球は 12W を消費し, 電流計は 1A を示す」
    - (A) ある 1 つの電球が切れた場合, どのような問題が生じるか?
    - (B) A の問題を避けるには, どのように電飾をつなげればよいか?
    - (C) B の問題点は何か?
    - ◇ 解答

- クリスマスツリーの電飾は直列でつながれている
  - (A) 全ての電飾が消え, どの電球が切れたかがわからない
  - (B) 電球を並列でつなげば, どの電球が切れているかがわかる
  - (C) 多くの電球を並列でつなぐことは困難. とてつもなく長いワイヤーが必要
- **Cube of bulbs problem**
- ◇ Fig. 4 の問題

## Results

### *Recall test (for the pre-test)*

- 学生の電気回路に関する知識の評価
  - 2人の評価者がプロトコルから評価
  - 2人の評価の一致度は97%~100%
- Table 10 はセッション1の Recall test(特定の名称)の結果
  - AVOW よりも方程式グループの方が, 多くの知識を持っているようにみえる
  - どの項目でも, AVOW と方程式グループとの優位差は認められなかった
- Table 11 はセッション1の Recall test(関係性)の結果
  - 評価
    - ◇ 関係性が想起される確率を50%と設定
    - ◇ 50%を基準に, 学生が想起できた/できなかったを評価
  - AVOW グループ
    - ◇ 少なくとも8/9項目は想起できた
  - 方程式グループ
    - ◇ 少なくとも7/11項目は想起できた
      - AVOW グループで, 基本的な関係性の理解が顕著

### *MC questions (Overall performance)*

- Fig. 8 は MC questions の結果
  - 2(グループ: AVOW/ 方程式) × 3(MC questions のタイミング: pre/ post/ delayed) の分散分析
    - ◇ タイミングの主効果あり ( $F(2, 32)=51.5, p < .0001$ )
    - ◇ グループの主効果なし ( $F(1, 2)=0.06, n.s.$ )
    - ◇ 交互作用あり ( $F(16, 32)=6.037, p < .01$ )
      - AVOW: pre-test < post-/delayed test ( $ps < .001$ )
      - 方程式: pre-test < post-/delayed test ( $ps < .001$ )
      - 各タイミングにおけるグループ間の有意差はみられなかった
  - 各グループで学習効果がみられた

- Fig. 9 の(a)-(d)は MC questions のカテゴリーごとの結果
  - 2(グループ : AVOW/ 方程式)×2(MC questions のタイミング : pre/ post delayed)の分散分析
    - ◇ タイミングの主効果あり ( $F_s(1, 16) > 10.1, p_s < .01$ )
    - ◇ グループの主効果なし ( $F_s(1, 1) < 0.86, n.s.$ )
    - ◇ (d)でのみ交互作用あり ( $F(1, 16) = 10.1, p < .01$ )
      - (d) AVOW: pre-test < post delayed test ( $p < .001$ )
      - (d) 方程式: pre-test  $\simeq$  post delayed test
      - (d) post delayed test: AVOW > 方程式 ( $p < .05$ )
  - 基本的な問題では, AVOW と方程式の両グループに違いはみられない
  - 複雑な問題では, AVOW グループで post test のパフォーマンスは高かった
- Table 12 は, MC questions の post delayed test で外的表象を使用した割合
  - 各問題で外的表象を使用した学生の割合の平均値を示す
    - ◇ どの問題でも, 方程式よりも AVOW グループの方が外的表象を使用した割合は高い ( $t$ 検定,  $p_s < .05$ )
      - 各グループで使用された外的表象
        - 方程式グループ: 方程式または数字の計算のどちらか (例: Fig. 13, 18)
        - AVOW グループ: AVOW のスケッチが描かれていた (例: Fig. 10, 11, 17)
  - 条件確率
    - ◇ 外的表象を使用した学生の内, 問題に正解した学生の割合
      - AVOW  $\simeq$  方程式 ( $t$ 検定,  $p_s > .05$ )
    - ◇ 問題に正解した学生の内, 外的表象を使用した学生の割合
      - AVOW > 方程式 ( $t$ 検定,  $p_s < .05$ )
        - 方程式グループでは, 外的表象を使用しなくても問題に正解できた

### *Transfer problems*

- String of lights
  - 外的表象の使用
    - ◇ AVOW(16 事例) > 方程式(4 事例)
  - 電気回路構造と電球との関係性の理解
    - ◇ 電球の数を示した学生: AVOW(5 名) > 方程式(1 名)
    - ◇ 電気の特長について示した学生: AVOW(5 名) > 方程式(3 名)
    - ◇ 実用的な問題について示した学生: AVOW(5 名) < 方程式(8 名)
      - 方程式グループでは, 電気回路の特長よりも日常的な問題へ関心が向いた
- Cube of bulbs
  - Table 13, 14 は Cube of bulbs で, 学生のスケッチとプロトコルを分析した結果

- ◇ 方程式グループ (Table 13)
  - 4名の学生のみ、問題解決に着手することができた
  - 解答を示した学生はいない
- ◇ AVOW グループ (Table 14)
  - 全ての学生が、AVOWの図を描くことから問題解決を開始
  - Fig. 15, 16はAVOWの図の例 (Fig. 15: 適切な図, Fig. 16: 不適切な図)
  - 6名の学生が解答を示した (1名が正解, 3名は正解に近い状態)

### Basic comprehension

#### ● AVOW グループ

##### ➤ セッション3の Recall test

##### ◇ AVOW グループの典型例

##### ◇ S6のプロトコル

Okay, you've got volts along one side and current along the other with  $V$  and  $I$ , and then the gradient is  $R$  which is resistance and the area is  $P$  which is power ... (yeah) ... which are ... volts, amps, ohms and watts. (Yeah) ... If something's in series you pack them up this way and if it's in parallel you go across this way.

- AVOWのボックスを1つのチャンクまたは概念として入力している

##### ➤ MC question の post delayed test

##### ◇ カリキュラムの後半では、学生のAVOWの描写が洗練された

- Fig. 7の状態を適切に描写 (Fig. 11)
- 適切ではないAVOWの描写もあった (Fig. 10)

##### ➤ Transfer の string of lights

##### ◇ 電球が切れることへの理解が洗練されている

##### ◇ S15の解答

- 1つの電球が切れると抵抗は無限大になる。だから、基本的に全ての電球が消えることになる

#### ● 方程式グループ

##### ➤ セッション3の Recall test

##### ◇ プロトコル分析から、方程式グループでは、まとまりのない発話が目立った

##### ◇ 実験者の generic prompt, question prompt の数

- generic prompt: AVOW(5.0) < 方程式(15.3) ( $t$ 検定,  $p < .001$ )
- question prompt: AVOW(1.6) < 方程式(10) ( $t$ 検定,  $p < .05$ )

##### ➤ MC question の post delayed test

##### ◇ 誤った方程式を適用したケース(3事例)があった

##### ◇ 方程式にシンボルを書き加えて、状況を理解した事例もあった (Fig. 13)

##### ◇ Fig. 7の状態を方程式で適切に示す (Fig. 14)

- 適切な手順であるが，式の変換が 4 回必要
- **Transfer の string of lights**
  - ◇ 電球が切れることへの理解が断片的
  - ◇ 学生は，「全ての電球が切れる」以上のことを示さなかった
    - 電気回路の理解は，断片的であり，不完全である

### *Problem solving*

- **AVOW グループ**
  - **Fig. 15** は，**Cube problem** の最適な解答の例
    - ◇ 電気回路を 3D のボックスで描く (図の右上)
    - ◇ AVOW の形式で描き直す (図の上)
      - 真ん中と下の列のボックスの組み合わせがおかしい点に気づく
    - ◇ AVOW を整理して描き直す (図の下)
    - ◇ 高さから計算を行って解答
  - **Fig. 16** は，**Cube problem** の最も不適切であった解答例
    - ◇ この図でさえ 3 つの並列な回路の繋がりを示している
  - **Fig. 17** は AVOW の調整の例
    - ◇ **Fig. 2** の問題を図化 (左)
    - ◇ 電球 A が切れたあとで，ボックス B と C の面積は等しくなる (左から 2, 3 番目)
      - 図の高さが，元の図の高さよりも長くなることに気づく
    - ◇ 元の図と同じ高さの図に書き直す
- **方程式グループ**
  - **Fig. 18** は方程式の解法例
    - ◇ **Fig. 2** の問題の解答
    - ◇ 正しい方程式を使用. 矢印を使用して仕組みを理解
    - ◇ 部分的な正解に留まり，電気回路全体の抵抗を示すことはできなかった
  - **Fig. 19** は **Cube problem** で最も正解に近づいた解法
    - ◇ しかし，この学生はこの解答を途中で止める
      - 適切な解法と思わなかったのかもしれない
- **AVOW グループ**
  - 並列で繋がる電気回路の表象を正しく持ち，上手く操作することができた
- **方程式グループ**
  - 部分的な解答はできるが，全体的な情報の統合を上手く行うことができなかった

### **Representational systems for learning**

#### *Acquisition of coherent networks of concepts*

- Fig. 20 は, AVOW グループで獲得されたと考えられる電気回路の概念図
  - Recall test の発話を基に生成
  - 上方ほどシンプル, 下方ほど複雑
  - リンクは図の操作(付け加え, 変換)を示す
- 方程式グループ
  - 電気回路や法則の概念が十分に獲得されたとはいえない
  - Fig. 20 に示されるような概念の区別ができていない

#### *Acquisition of problem solving procedures and strategies*

- AVOW グループ
  - 学生の使用方法やテクニックは単純
    - ◇ 一般的なルールを AVOW と問題の制約にあてはめるだけ
  - エラーに気づいた場合でも, 容易に問題解経路を戻ることができる
- 方程式グループ
  - MC question での方程式の使用, Recall test で方程式の発話が少なかった
    - ◇ 方程式を十分に理解できなかった
    - ◇ 問題状況と方程式との対応を理解できなかった
    - ◇ 方程式を使用して問題状況を理解することを諦めた
      - いずれかが当てはまる

#### *Characteristic of effective representational systems*

- 学習に有効な表象システムの特徴
  - (a) 抽象レベルの異なる情報が統合されている
    - ◇ AVOW では抽象レベルの異なる情報が統合されていた
      - 電流の強さ, 電流の法則, これらの関係が AVOW に示されている
    - ◇ 方程式では抽象レベルの異なる情報がうまく統合されていない
      - Table 1 の方程式(1)~(10), 方程式(11)~(18)
      - 法則と個別の事例との関係性の理解が困難
  - (b) 包括的な概念と局所的に異質な概念とが区別して統合されている
    - ◇ AVOW ではボックスによって電流と法則との関係が適切にしめされていた
      - 例: キエルヒホフの法則 (Table 2 の方程式(23), (24))
      - 学生は, AVOW を使用して, キエルヒホフの法則を理解することができた
    - ◇ 方程式では電気回路の状態と方程式との関係が明確ではない
      - ある方程式を別の電気回路に適用することも可能
      - 学生は, 電気回路と方程式の包括的な概念を獲得することができなかった

(c) 異なる視点に基づく表現が統合されている

- ◇ AVOW では視点が統合されている
  - 電流, 電圧などの関係
  - 様々な階層のネットワーク
  - オームの法則, キエルヒホフの法則などの関係
- ◇ 方程式ではこのような視点の統合はない

● 問題解決に有効な表象システムの特徴

(a) 適度に柔軟な表現がなされている

- ◇ AVOW は柔軟性に欠けることも, 柔軟過ぎることもない
  - ある表現から, 別の表現への変換が可能
  - 曖昧な表現や意味のない表現が含まれることもない
- ◇ 方程式は柔軟すぎる表象である
  - どの問題にももっともらしく当てはまる
  - ほとんどの問題で複数の方程式の使用が必要, 且つ, 方程式自体の変換が可能
    - これらを適切に操作して解答する必要がある

(b) 表現の変換手続きが容易, (c) 表現の変換手続きが一貫している

- ◇ AVOW を使用した解答は方程式を使用した場合よりも, ステップ数と各ステップでの手続きは少なくて済む

## Law Encoding Diagrams

● 先行研究 (Cheng, 1996b, 1996c)

➤ LEDs を使用した学習効果についての研究

- ◇ 素粒子の衝突を 2 種類の方法で学習
- ◇ 2 つのグループを比較
  - LEDs システムを使用して, 素粒子の衝突をシミュレートできるグループ
  - 同じシステムを, 方程式に基づく表象で使用したグループ
- ◇ 結果
  - LEDs システムを使用した方が, 推論の質に改善がみられた
    - 様々なシミュレーションを行い, その時々で LEDs の状態を観察
    - 多くの事例を包括する推論を行うことができた

● 今回の研究

➤ 4 つの点で先行研究を拡張している

- ◇ LEDs を AVOW という異なる表象で示すことの効果がみられた
- ◇ 電気回路について知識のない学生を対象に実験を行い, 学習効果を検討
- ◇ 学生が AVOW の表象を変換して問題状況を理解するプロセスを検出
- ◇ 学習と問題解決を促進させる表象の 6 つの原則が示された

Table 1  
Basic knowledge about electricity in terms of the two representations

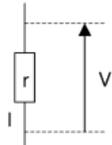
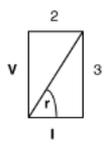
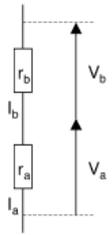
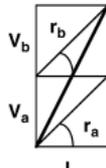
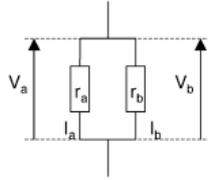
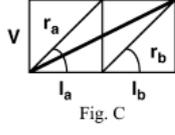
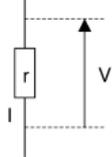
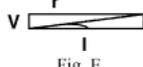
Description	Network diagram	Equations	AVOW
A single load or isolable sub-network		Ohm's law : $V = I \times r$ Power law : $P = V \times I$ , or $P = I^2 \times r$	(1) (2)  Fig. A
Loads in series		$r_{total} = r_a + r_b$ $V_{total} = V_a + V_b$ $I_a = I_b$ $P_{total} = P_a + P_b$	(3) (4) (5) (6)  Fig. B
Loads in parallel		$\frac{1}{r_{total}} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}$ $r_{total} = \frac{r_a r_b}{r_a + r_b}$ $V_a = V_b$ $I_{total} = I_a + I_b$ $P_{total} = P_a + P_b$	(7a) (7b) (8) (9) (10)  Fig. C
Insulators and conductors		$r_{insulator} \approx \infty$ $V_{insulator} \neq 0$ , often large $I_{insulator} \approx 0$ $P_{insulator} \approx 0$	(11) (12) (13) (14)  Fig. D
		$R_{conductor} \approx 0$ $V_{conductor} \approx 0$ $I_{conductor} \neq 0$ , often large $P_{conductor} \approx 0$	(15) (16) (17) (18)  Fig. E

Table 2  
Batteries and knowledge about circuit behaviours in terms of the two representations

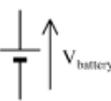
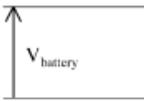
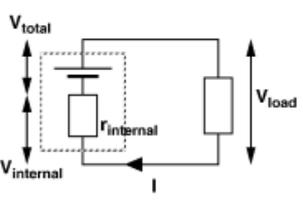
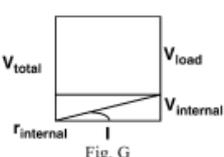
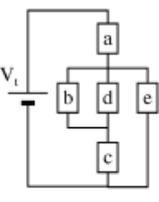
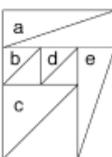
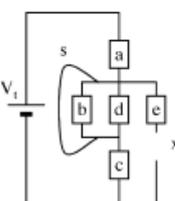
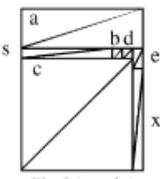
Description	Network diagram	Equations	AVOW
Voltage of an ideal battery		$V_{battery} = V_{circuit}$	(19)  Fig. F
Effect of internal resistance of a battery		$V_{total} = I_{total} \times r_{internal} + V_{load}$ $r_{total} = r_{internal} + r_{load}$ $I_{total} = I_{internal} + I_{load}$	(20) (21) (22)  Fig. G
Kirchhoff's Laws		$I_a = I_b + I_d + I_c, \quad \sum I_i = 0$ $V_i = I_a \times r_a + I_b \times r_b + I_c \times r_c,$ $V_i = \sum I_i \times r_i$	(23) (24)  Fig. H
Cut circuit (x) and short circuit (s)		Cut : ignore sub-network containing the cut Short : ignore sub-networks in parallel with the short	(25) (26)  Fig. I (x and s)

Table 3  
Representative electricity problems

Problem	Description
1. Single load	Find $r$ and $P$ given magnitudes of $V$ and $I$ ; and find $V$ and $I$ given $P$ and $r$ .
2. Series network	Find $V, I, P$ for each of the two loads in series and for the whole network given the resistance of each load.
3. Parallel network	Find $V, I, P$ for each of the two loads in parallel and for the whole network given the resistance of each load.
4. Composite	Find the power dissipated by a network, with isolable sub-networks, connected to a battery with a known voltage.
5. Blown bulb	Analyse a circuit of three bulbs when one of them burns out.
6. Resistance matching	What should the resistance of a load be to maximise its power when it is directly connected to a battery with an internal resistance?
7. Ideal and real batteries	When one, two or three batteries are connected across a real battery, why does their brightness change but when connected to an ideal battery there is no change?
8. Short circuit	What happens to the power dissipated in a load and a real battery when a short circuit occurs?
9. Wheatstone bridge	What is the overall resistance of a Wheatstone bridge?
10. Cube of bulbs	What is the overall resistance of a "Cube" of bulbs (Fig. 4)?

Table 4  
Solution to the Blown bulb problem using the algebraic approach

Steps	Procedure	Equations used
Let $r = r_A = r_B = r_C$		
1. Before: circuit working normally $r_t = \frac{r_A r_B}{r_A + r_B} + r_C = \frac{r_A r_B + r_A r_C + r_B r_C}{r_A + r_B} = \frac{3}{2}r$	EW1, EW1, EW2, EW3, EI1	(3), (7)
2. $I_B = \frac{I_t}{2} = \frac{V_t}{2r_t} = \frac{V_t}{3r}$	EW1, EW2	(9), (1)
3. $P_B = I_B^2 r_B = \left(\frac{V_t}{2r_t}\right)^2 r_B = \left(\frac{V_t}{4r_t^2}\right) r_B$ $= V_t^2 r_B \frac{[(r_A + r_B)/(r_A r_B + r_A r_C + r_B r_C)]^2}{4} = \frac{V_t^2}{9r}$	EW1, EW1, EW2, EW3, EW2, EI1	(2), (1)
4. Similarly, $P_A = \left(\frac{V_t}{4r_t^2}\right) r_A = \frac{V_t^2}{9r}$	EW4	
5. $I_C = I_t = \frac{V_t}{r_t} = \frac{2V_t}{3r}$	EW1, EW2	(1)
6. $P_C = I_C^2 r_C = \left(\frac{V_t}{r_t}\right)^2 r_C = \left(\frac{V_t}{r_t}\right)^2 r_C$ $= V_t^2 r_C \left[\frac{r_A + r_B}{r_A r_B + r_A r_C + r_B r_C}\right]^2 = \frac{4V_t^2}{9r}$	EW1, EW1, EW2, EW3, EW2	(2), (1)
7. $P_A = \frac{V_t^2}{9r}, P_B = \frac{V_t^2}{9r}, P_C = \frac{4V_t^2}{9r}$	EI2	
8. After: cut circuit, ignore $r_A, r_B$ and $r_C$ in series	G3	(26)
9. $r_t = r_B + r_C$	EW1	(3)
10. $I_B = I_t = \frac{V_t}{r_t} = \frac{V_t}{r_B + r_C} = \frac{V_t}{2r}$	EW1, EW2, EI1	(1)
11. $P_B = I_B^2 r_B = \frac{V_t^2 r_B}{(r_B + r_C)^2} = \frac{V_t^2}{4r}$	EW1, EW2, EI1	(2)
12. Similarly, $P_C = \frac{V_t^2}{4r}$	EW4	
13. $P_B = \frac{V_t^2}{4}, P_C = \frac{V_t^2}{4}$	EI2	
14. Compare powers before and after	EI2	
Procedures per step, knowledge steps	2.4	9

Table 5  
Solution steps in the Blown bulb problem using the AVOW diagram approach

Steps	Procedures	Diagrams
1. Draw AVOW diagram for good circuit (Fig. 3a)	AD1	B, C
2. Re-draw $R_B$ as an insulator (Fig. 3b)	AD1	I, D
3. Re-scale $R_A$ in relation to $R_C$ (Fig. 3c)	AD2	H
4. Re-scale whole diagram (Fig. 3d)	AD3	F
5. Compare areas of $R_A, R_C$	A14	
Procedures per step, knowledge steps	1	4

Table 6  
Steps in the conventional solution to the Cube of bulbs problem

Steps	Procedures	Equations
1. Re-draw the circuit in 2D (Fig. 5a)	C3	
2. This is not a simply decomposable circuit	C1	
3. Re-conceptualise circuit in equivalent form (Fig. 5b)	C3	
4. $r_{ed} = \frac{r_d r_e}{r_e + r_d} = \frac{1}{2}$	EW1, EI1	(7)
5. $r_{sub} = r_a + r_{ed} + r_l = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$	EW1, EW2, EI1	(3)
6. $\frac{1}{r_{int}} = \frac{1}{r_{sub}} + \frac{1}{r_{sub}} + \frac{1}{r_{sub}} = \frac{3}{r_{sub}} = \frac{6}{5}, r_{int} = \frac{5}{6}$	EW1, EW2, EI1	(7)
Procedures per step, knowledge steps	1.8	3

Table 7  
Steps in the AVOW solution to the Cube of bulbs problem

Steps	Procedures	Diagrams
1. Draw AVOW boxes a, b, and c in parallel (Fig. 6a)	AD1	C
2. Add boxes d and e to box a (Fig. 6b)	AD1	B
3. Repeat for boxes f and g, and h and i, under boxes b and c (Fig. 6b)	AD1, AD1	B, C
4. Draw box j under boxes e and f (Fig. 6c)	AD1	B
5. Repeat for box k under boxes g and h (Fig. 6c)	AD1	B, C
6. Draw box l split between boxes d and i (Fig. 6d)	AD1, AD2	H
7. Infer resistance from overall height and width	A13, A11	A
Procedures per step, knowledge steps	1.4	7

Table 8  
Steps and procedures in the solutions to the 10 problems

Problem	Equation		AVOW	
	Steps	Mean procedures per step	Steps	Mean procedures per step
1. Single load	6	1.8	4	1.0
2. Series network	8	2.1	6	1.0
3. Parallel network	8	2.1	6	1.0
4. Composite	8	2.3	8	1.3
5. Blown bulb	14	2.4	5	1.0
6. Resistance matching	10	1.3	8	1.6
7. Ideal and real batteries	22	2.5	7	1.1
8. Short circuit	7	2.3	5	1.6
9. Wheatstone bridge	22	1.5	6	1.3
10. Cube of bulbs	6	2.3	7	1.4
Total	111	2.1	62	1.3

Table 9  
Comparisons of the two approaches over all 10 problems

Measure	Equations	AVOW
1. Declarative knowledge items		
1.1. Number of items (equation or diagrams)	27	10
1.2. Proportion of items used at least once	70.45%	100%
1.3. Average number of problems using each item	3.1	6.6
1.4. Lack of uniformity of use of items <sup>a</sup>	0.60	0.44
2. Steps and procedures		
2.1. Number of representation specific procedures	12	7
2.2. Mean number of steps per problem	11.1	6.2
2.3. Median number of steps per problem	8	6
2.4. Total number of procedures used	228	78
2.5. Mean number of procedures per step	2.1	1.3
2.6. Lack of uniformity of use of procedures <sup>a</sup>	0.51	0.34
2.7. Number of times general procedures (C1–5) used	10	3
3. Steps and knowledge items		
3.1. Proportion of steps associated with items	59.5%	75.8%

<sup>a</sup> This is a linear measure,  $S$ , ranging from 0, for a complete uniformity, to 1 for a maximally skewed distribution.

Table 10  
Initial pre-test recall test

Electricity—categories and facts	Number of Ss	
	EQNS	AVOW
Things		
Batteries	2	4
Resistors/loads	5	5
Bulbs	3	4
Switches	2	3
Properties		
Voltage	6	3
Volts	6	3
Current	4	5
Amperes	6	4
Resistance	4	5
Ohms	6	2
Power	2	2
Watts	3	1
Conductors/low $R$	7	6
Insulators/high $R$	7	6
Networks		
Series	5	5
Parallel	6	5
Problems		
Battery problems	3	2
Blown bulbs	5	3
Open circuits	2	5
Short circuits	0	3
Total	84	76

Table 11  
Proportions of participant in the two groups recalling various categories of electricity facts

Category	AVOW participants		EQNS participants	
	Facts	%	Facts	%
Basic relations	$V = \text{height}$	100	$V = I \times r$ (and variants)	78
	$I = \text{width}$	100	$P = I \times V$ (and variants)	78
	$r = \text{gradient}, r = \frac{V}{I}, V = I \times r$	100	$P = I^2 \times r, P = \frac{V^2}{r}$	22
	$P = \text{area and/or } P = I \times V$	100	$I_t = I_a = I_b$	33
Series relations	Stack AVOW boxes	89	$V_1 = V_a + V_b$	44
			$r_1 = r_a + r_b$	89
Parallel relations	AVOW boxes side-by-side	89	$V_1 = V_a = V_b$	78
			$I_t = I_a + I_b$	33
			Either $R_1$ formula	78
Network overall	Total resistance	22	–	
Component properties	Insulators are tall and thin	56	Switch open (huge resistance)	67
	Conductors are short and wide	56	Switch closed (low resistance)	67

Table 12  
External representation uses on delayed post-test MC questions

Question type	Proportion of questions		$P$ (correct given representation used)		$P$ (representation used given correct)	
	AVOW	EQNS	AVOW	EQNS	AVOW	EQNS
	Basic	.73	.09**	1.00	1.00	.73
Relations	.83	.41*	.92	.88	.88	.40*
Basic interactions	.93	.22**	.90	1.00	.93	.26**
Complex interactions	.65	.03**	.85	1.00	.66	.05**
Total	.74	.19**	.92	.93	.78	.22**

Note. \* $p < .01$ , \*\* $p < .001$ , two-tailed  $t$ -tests.

Table 13  
Summary of stages of EQNS group attempted solutions to the Cube problem

Attempted stage	S26	S27	S28	S29	S30	S31	S32	S33	S34
Re-draw circuit diagram							1		
Directions of current	1		1					1	
Setting up some equations	1		1		1			1	
Substitution of resistances	1								
Full set of (12) equations									
Elimination of equations									
Complete solution									
Answer given	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Table 14  
Summary of stages of AVOW group attempted solutions to the Cube problem

Attempted stage	S2	S4	S6	S7	S10	S11	S13	S14	S15
Re-draw circuit diagram			1			1	1		
Composite AVOW diagram	1	1	1	1	1	1	1	1	1
All boxes same gradient	1	1	1	1	1	1	1	1	(1)
12 AVOW boxes	1		1		1				(1)
12 boxes same gradient	1		1		1				(1)
Nearly correct configuration	1		1		1				
Correct overall orientation					1				
Answer given	1.2	–	6/5	–	5/6	–	12	0.5	<1

## Appendix A. Equations mini-curriculum sample topic

### A.1. Parallel resistors

Loads are connected side-by-side.

The current splits into two or three streams that flow through each load and then after get recombined.

The voltage is the same across all the loads.

The total current,  $I$ , is the sum of all the individual currents.

Total resistance,  $R$ , is the reciprocal of the sum of the reciprocals of all the individual resistances.

Total resistance goes down as more resistors are added, whilst the overall power goes up.



One load

$$\begin{aligned} V_{\text{total}} &= V_a \\ R_a &= \frac{V_a}{I_a} \\ P_a &= I_a \times V_a \end{aligned}$$



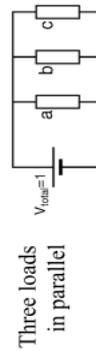
Two loads in parallel

$$\begin{aligned} V_{\text{total}} &= V_a = V_b \\ I_{\text{total}} &= I_a + I_b = \frac{V}{R_a} + \frac{V}{R_b} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \quad \frac{I_a}{I_b} = \frac{I_a + I_b}{V} \quad \text{or} \quad \frac{I_a}{I_b} = \frac{R_b}{R_a}$$

$$R_{\text{total}} = \frac{R_a \times R_b}{R_a + R_b}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{total}} &= P_a + P_b = (I_a \times V) + (I_b \times V) \\ &= V \times (I_a + I_b) \end{aligned}$$



Three loads in parallel

$$\begin{aligned} V_{\text{total}} &= V_a = V_b = V_c \\ I_{\text{total}} &= I_a + I_b + I_c = \frac{V}{R_a} + \frac{V}{R_b} + \frac{V}{R_c} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{I_a}{V} + \frac{I_b}{V} + \frac{I_c}{V} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \quad \text{or} \quad \frac{I_a}{I_b} = \frac{R_b}{R_a}$$

$$R_{\text{total}} = \frac{(R_a \times R_b) + (R_b \times R_c) + (R_a \times R_c)}{R_a + R_b + R_c}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{total}} &= P_a + P_b = (I_a \times V) + (I_b \times V) + (I_c \times V) \\ &= V(I_a + I_b + I_c) \end{aligned}$$

## Appendix B. AVOV diagram mini-curriculum: sample topic

### B.1. Parallel resistors

Loads are connected side-by-side—place AVOV boxes side-by-side.

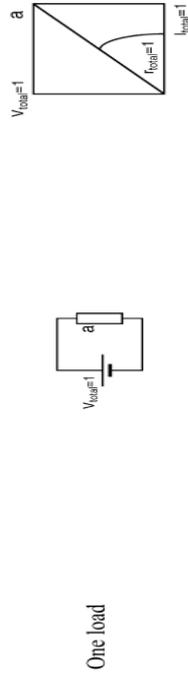
The current splits into two or three streams that flow through each load and then after get recombined—put the AVOV boxes side-by-side.

The voltage is the same across all the loads—make the AVOV box heights equal.

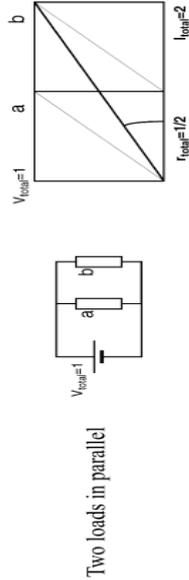
The total current,  $I_{\text{total}}$ , is the width of the whole diagram.

Total resistance,  $r_{\text{total}}$ , of all the loads is the gradient of the diagonal of the whole diagram.

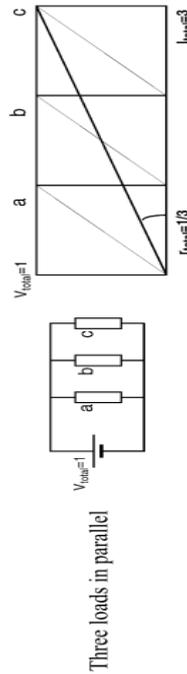
Total resistance goes down as more resistors are added, whilst the overall power goes up.



One load



Two loads in parallel



Three loads in parallel

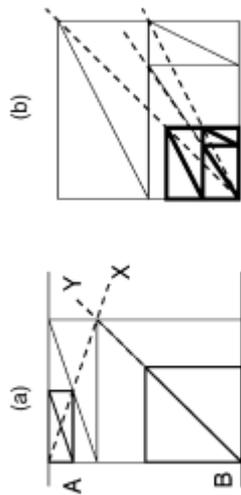


Fig. 1. Two geometric construction techniques for AVOW diagrams.

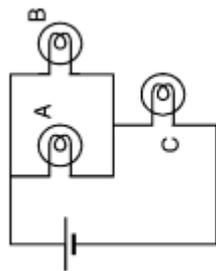


Fig. 2. A network of light bulbs.

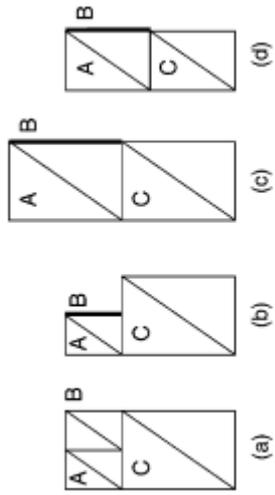


Fig. 3. Solution to the Blown bulb problem using AVOW diagrams.

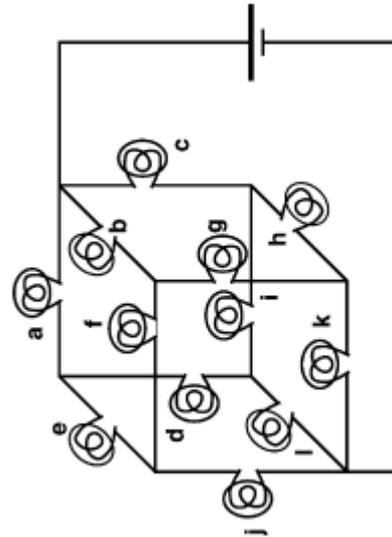


Fig. 4. What is the overall resistance of this cube of identical bulbs?

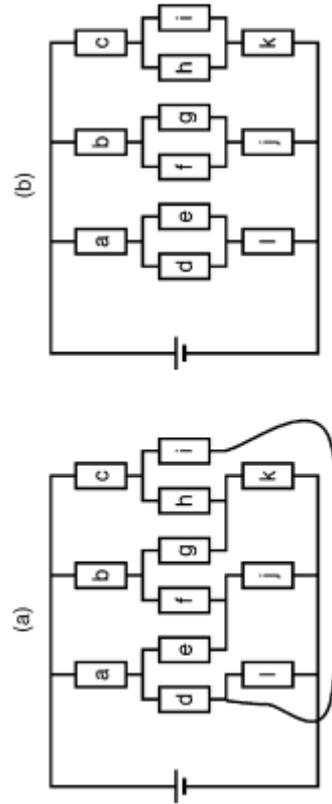


Fig. 5. The cube of resistors: (a) re-drawn and (b) re-conceptualised.

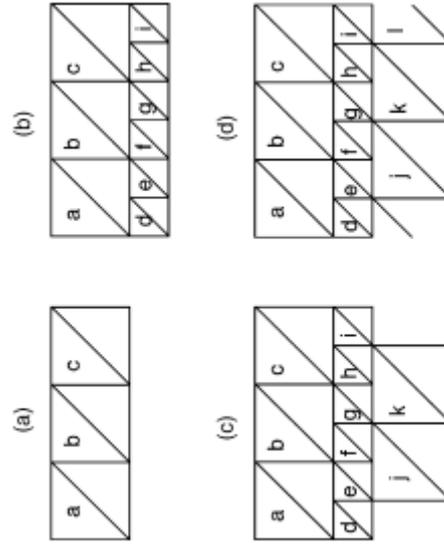


Fig. 6. AVOW diagram solution to the cube of resistors problem.

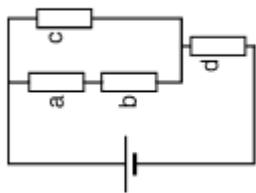


Fig. 7. A simple circuit.

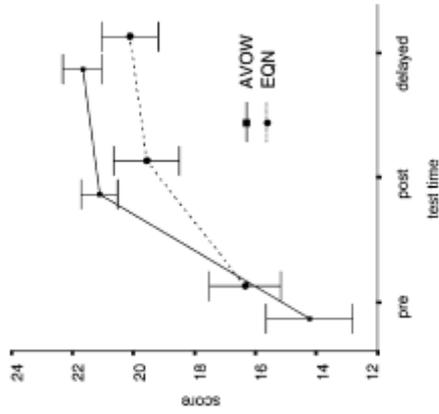


Fig. 8. Average of the MC questions overall scores for both groups.

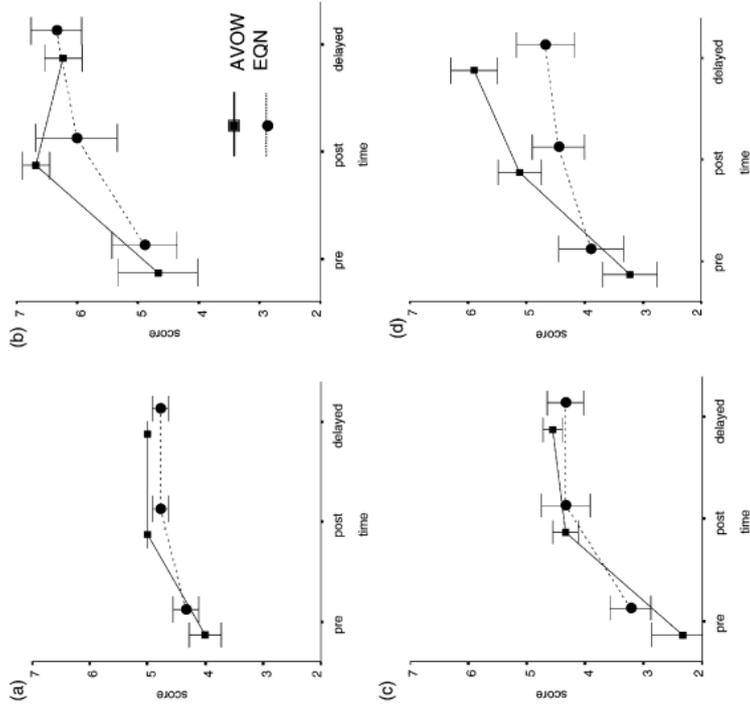


Fig. 9. Average of scores on the four types of questions: (a) basic, (b) relation, (c) basic interaction, (d) complex interaction.

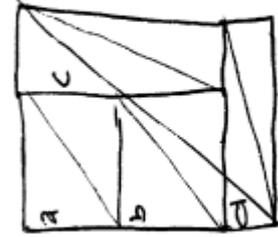


Fig. 11. Typical AVOW diagram solution to Exercise 6.1 (S4).

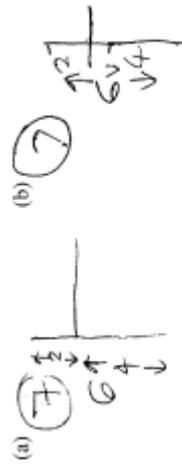


Fig. 10. Two incomplete AVOW diagrams: (a) S4; (b) S13.

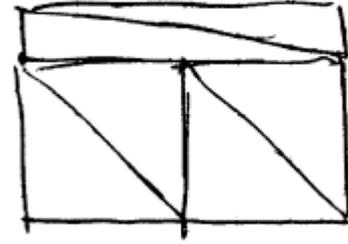


Fig. 12. Typical solution to MC Question 20 (S11).



Fig. 13. Some of S32's augmented equations.

$$R_{k+s} = R_n + R_b$$

$$R_{min} = \frac{R_{max} + R_D}{R_{n+s} + R_c} + R_3$$

$$R_{rec} = \frac{R_{n+s} \times R_c}{R_{n+s} + R_c}$$

$$R_T = \frac{(R_n + R_b) \times R_c}{(R_n + R_b) + R_c} + R_D$$

Fig. 14. Typical solution to Exercise 6.1 (S32).

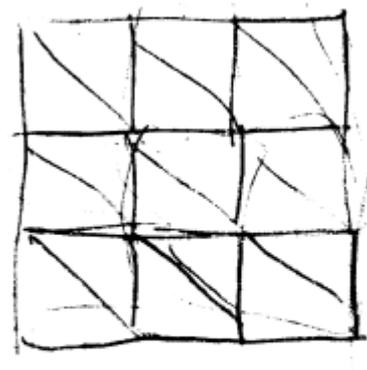


Fig. 16. The worst AVOW diagram solution for the Cube of bulbs problem (S13).

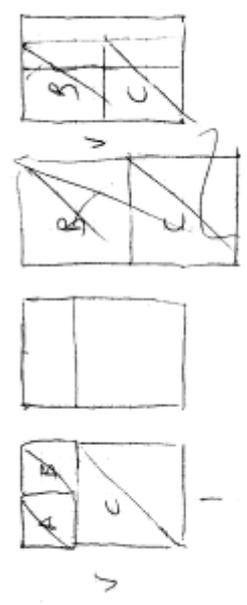


Fig. 17. Typical AVOW diagram solution to MC Question 24 (S10).

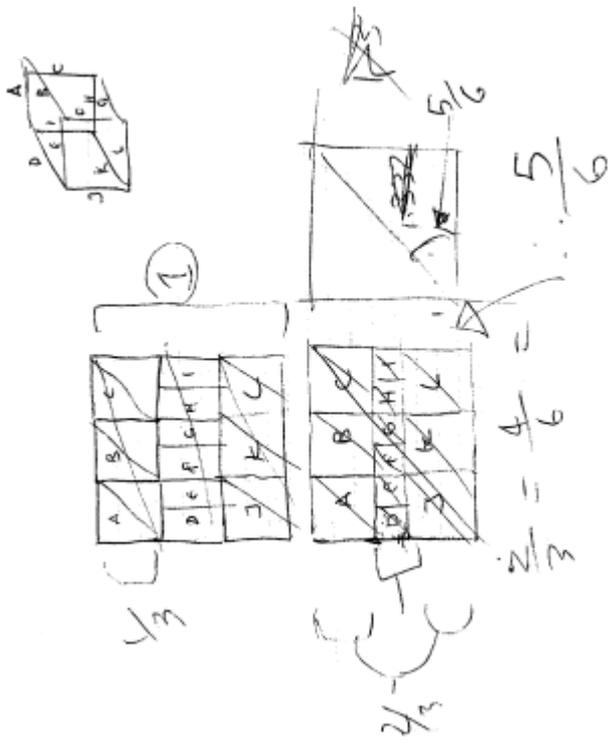


Fig. 15. The best AVOW diagram for Cube of bulbs problem (S10).



Fig. 18. S32's expressions for MC Question 24.

$$\begin{aligned}
 V &= c + d + e. \\
 V_c &= V_a + V_b + V_e. &= (I \times R_c) + (I \times R_c) + (I \times R_c) \times 2 \\
 V_e &= V_c + V_d + V_j \\
 V_c &= V_b + V_d + V_h \\
 V_d &= V_b + V_h + V_l \\
 V_c &= V_a + V_j + V_c \\
 V_t &= V_c + V_c + V_j
 \end{aligned}$$

Fig. 19. Best Equations approach attempt at the cube problem (S26).

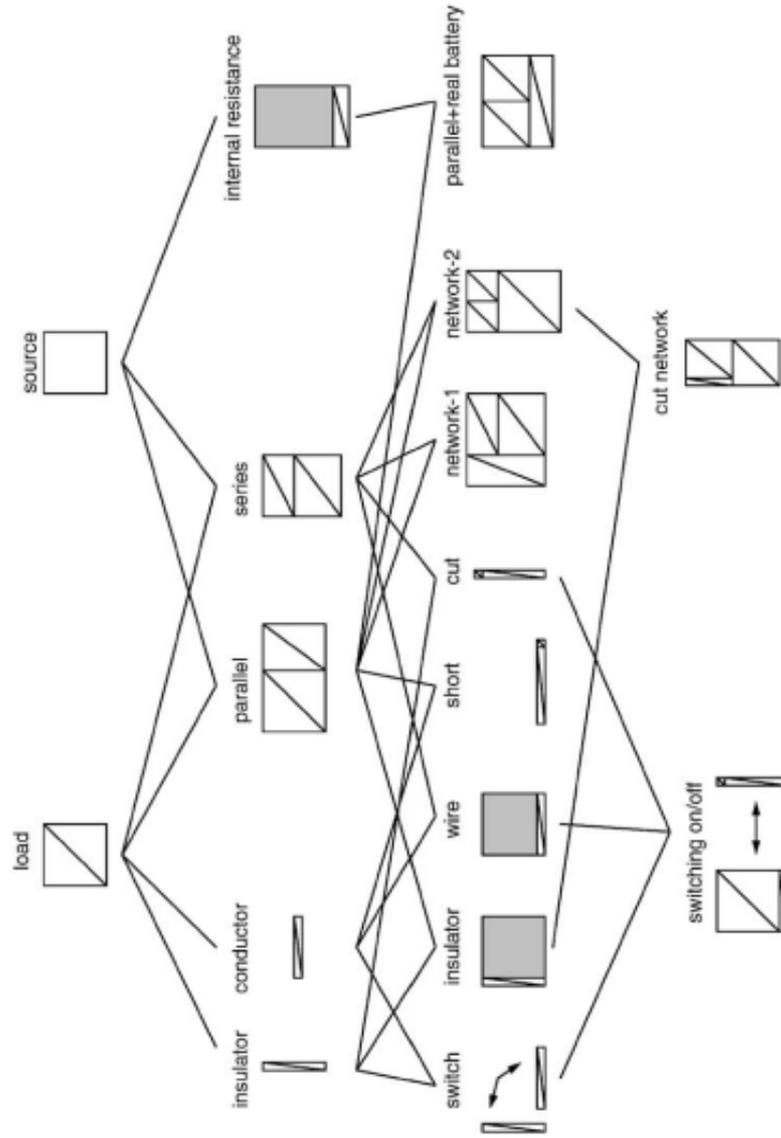


Fig. 20. Network of AVOW diagram concepts.