

The relation between the problem posing and problem solving skills of prospective elementary mathematics teachers

Tugrul Kara(a), Ercan Özdemir(b), Ali Sabri Ipek(b), Mustafa Albayrak(a)

(a)Kazum Karabekir Education Faculty, Atatürk Universty, Erzurum, 25100, Turkey

(b)Education Faculty, Rize Universty, Çayeli-Rize,53200, Turkey

Procedia Social and Behavioral Sciences 2 (2010) 1577–1583

<World Conference on Educational Sciences 掲載>

1. Introduction

- 近年、数学教育研究は情報の構造化、非日常的な問題の解決策に集中している。
 - それらの問題をどのようにして生徒が解決したのかを知ることが強調されている
- 問題解決の行動は問題を作成するための推移フェーズであると示唆されている
 - 数学的活動における指導の重要な1つとして作問能力をあげている。
- 作問は問題解決能力の発達などにポジティブな貢献としてのたくさんの結果にとって重要であると述べている(Silver,1994)
- 作問は与えられた1つの問題の新しい組織体である(Leung,1993)
- Englishらは作問を「新規問題をプロデュースすること」「現在の問題を再構築するもの」として定義
- **2種類の作問手法**
 - ① **状況や体験を発見するための作問**
 - 数学者は数学について問題を提起し、その問題を解くことで数学に貢献する。
 - 問題解決中に遭遇した困難を克服するためにサブ問題を提起する準備ということである
 - ② **問題解決ベースの作問**
 - 問題解決は作問への推移フェーズとして解釈。
 - Polya's の問題解決の4ステップメソッド
 - ◇ 問題の理解
 - ◇ 計画の考案
 - ◇ 計画実行
 - ◇ 結果のチェック
 - Gonzalez (1998)は Polya's の問題解決の第5ステップとして「関連問題の生成」を追加を提案。問題と問題解決間の関連性指標として考えられる。
 - 生徒に解決済み問題において解決済み問題のコアとなる思考を質問したり、解決済み問題のデータを拡大させたり、変化させることでこの同じ状況を作れる(English,1997)
- 作問は数学的操作の理解レベルや問題解決スキルや意識を決定する情報資源となる(Van den Heuvel-Panhuizen,Middleton & Streefland, 1995; English, 1996)
 - 作問能力を発展させる機会を沢山持つべきであると示唆(NCTM, 2000)
 - 作問と問題解決は独立しているのではない(Silver, 1994; Silver & Cai, 1996; Cai &Hwang, 2002; English, 2003)
- Pre-service教師（見習い教師？教育実習生？教師候補者？）は作問を取り扱うことを頻繁に要求される。これは将来教師になるために極めて重要である。

- 作問と問題解決のスキルの関連と移行は重要項目である。
- 本研究
 - 級数と数列に関連した問題作成において、問題作成と問題解決における生徒の成功の関連を調査。
 1. 定着したパターンについて教師候補者は作問できるか
 2. 級数と数列における定着された問題を解くことが出来るか？
 3. どの解決方略であるか (Concrete, semiabstract, abstractの優先順位)
 4. 作問数と問題解決の成功に関連性はあるのか？

2. Method

2.1 Research group (実験参加者と期間)

教育学部の 33 人の女性と 43 人の男性
2008-2009 年の前期の間行った。

2.2. Data collection tool (Appendix 参照)

- サブ問題を包括した作問テストと問題解決テストが開発された。
 - 級数や数列のパターンについてシンボリック、図形的な表象を含んだアイテムで構成されている
 - 3 人の専門家、関連文献からテストの信頼性を確認
- 作問テストも問題解決テストも 3 つからなっている。
 - 無制約(Open-end)な項目におけるモデルを含んだ 3 種類の異なった問題を作問する (Problem posing test)
 - 問題解決テストは 2 つの選択をもっている。
 - 問題解決テストにおけるそれぞれの項目は作問テストのパターンを含む

2.3. Analysis of the data

- 1回目の授業で作問テスト、2回目の授業で問題解決テストを行った
- 問題解決テストと作問テストから得られた結果の分析として Cai と Hwang のデータ分析スキーマを採用 (Cai and Hwang ,2003)

作問テストの分析

- 作問された問題は与えられたモデルを越えて新しい状況を形成しているかどうかで分類された
 - もし問題が作問テストにおけるモデルを越した状況を尋ねたのならば、「問題拡張」 (Problem Extension) としてあらわす。
- 問題拡張の例
 - 作問テストの 2 問目
”ある男は 1 億円を初日に獲得した、彼は 2 ゲーム目で 4 億円失い、3 ゲーム目で 9 億円獲得した彼はこのゲームを続けてお金を獲得または失った。結果的に 11 か月目での男の損益状況はどうだろうか”
- 問題拡張を伴わない問題の例
 - 作問テストにおけるモデルを制限された問題として描写 (問題 2 を例に挙げる)
”モデルやパターンに照らしてみると、4 番目の図には何個ブロックが存在するだろうか”

- こういった分類にしたがって問題拡張を伴う問題が1個または2位個以上の状況によって行われた。

問題解決テストの分析

- 問題解決テストによって得られたデータ
 - 答えの正しさ
 - 解決方略
 - ◇ 教師候補者の解決方略は問題解決テストの2問目に対して与えられた解答によって決定した。
 - ◇ 問題解決テストの2問目は異なる解決方略が適合するように（いろんな解き方が出来るように）用意されている。
- 解決方略の種類
 - Concreat 方略
 - ◇ リストを作る、図形を書く、推測や制御(図1)
 - Semi-abstract 方略
 - ◇ 複合的な操作から構成。問題解決の包括的なアルゴリズムは含まない。
 - ◇ 例：7ヶ月目のアリの総数について “ $6*6=36, 36+91=127$ ”
 - Abstract 方略
 - ◇ 問題における一般的なルールの識別を要求
 - ◇ 教師候補者のアブストラクト戦略の例を図2に示す。7月に生まれたアリの数についての問題。

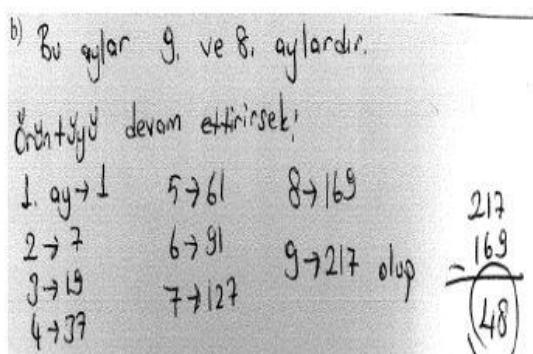


Figure 1: Concrete strategy used in problem solving

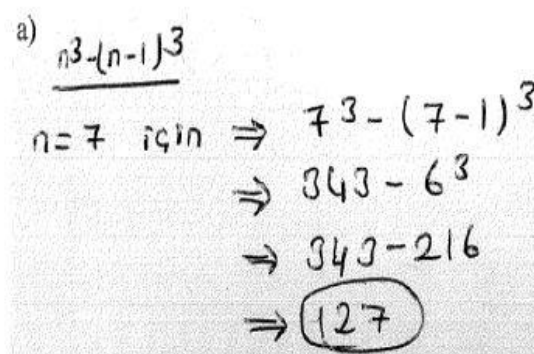


Figure 2: Abstract strategy used in problem solving

- テストの採点
 1. 正しく解決されたのならば1、間違っ解決されたのならば0としてコーディング
 2. 並行して作問が拡張問題なら1、拡張されていない作問なら0としてコーディング
- 以上から総合点数は決定される。独立 t 検定や相関分析は問題解決と作問スキル間の関連調査に用いた。

3. Findings and interpretation(知見と解釈)

3.1 Findings acquired from the problem posing test(作問テストからの知見)

- 表1に作問テストの結果を示す
 - 割合として算出
 - ◇ 0=作問できなかった人
 - ◇ 1=1問は作問できた人
 - ◇ 2=2問作問できた人
 - ◇ 3=3問作問できた人

- ある状況について3問作問できる人は他に比べて全体的に低い

Table 1. The percentages of different problem posing (problem extensions) in prospective teachers

n	Problem 1				Problem 2				Problem 3			
	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
76	22	13	20	45	9	11	26	54	30	13	27	30

3.2 Findings acquired from the problem solving test(問題解決テストからの知見)

- 表2に問題解決テストの結果を示す
 - 人数で算出
 - 異なる解法を用いることが向いている問題2の正確率は他の問題よりも高かった

Table 2. Problem solving success of prospective teachers

n	Problem 1		Problem 2		Problem 3	
	a	b	a	b	a	b
76	55	18	88	83	55	34

- 表3に問題2に関して教師候補者が用いた解法を示す
 - 教師候補者は semi-abstract 方略よりも abstract 方略と concrete 方略を用いていた。

Table 3. Solution strategies used in problem 2

Problem 2	Abstract	Semi Abstract	Concrete
a	36	21	32
b	29	21	33

3.3 The relation between problem posing and solving (問題解決テストからの知見)

- 表4に問題拡張の作問のレベルにしたがって問題解決に成功した割合を示す
 - 2問以上作問した人の問題解決成功率>1問作問した人の問題解決成功率

Table 4. The problem solving success according to the different number of problem posing (problem extensions)

	Problem 1		Problem 2		Problem 3	
	a	b	a	b	a	b
Posing problem with at least two problem extensions	60	21	94	87	60	38
Posing problem with less than two problem extensions	48	7	50	71	46	17

- 表5に作問テストと問題解決テストの点数の相関を示す
 - 強い相関がみられた($r=0.420, p<0.01$)

Table 5. The relation between problem posing and solving

Variables	N	p	r
Problem Solving Test Score	76	.000	.420
Problem Posing Test Score	76		

4. Discussion

- 級数と数列についての作問と問題解決について教師候補者の成功の関連が調査された。
- 表1から与えられた状況下での作問スキルは低い。
 - 与えられた状況に対して適切に問題を生成することさえもできない教師候補者にとって作問はとても困難
- 2問目で高い作問の成功率であったのは、日常生活において沢山の状況と関連した好都合なパターンや semi-abstract な素質であることと関連するのではないか。
- 表3から、関数を形成することを求められる状況では abstract 方略を用い、アルゴリズムを作る問題では concrete 方略を用いる。
- 表4より、2問以上作問した生徒は2問以下の作問の生徒より高いレベルの問題解決の成功をした。
 - Lowrie” 認知的手法を考慮に入れた問題作成と解決には重要な関連がある” (Lowrie, 2002)を裏付ける。
- 本研究は作問と問題解決のスコアに関連があることを結論とした。
 - 作問は問題解決と独立ではないという結果を論拠している (Leung, 1993; Silver & Cai, 1993; Gonzales, 1994; Silver, 1994; Silver & Cai, 1996; Cai & Hwang, 2002; English, 2003).
- 作問と問題解決との正の相関
 - 問題解決スキルを発達させるフェーズとして作問スキルが挙げられる指標ではないか

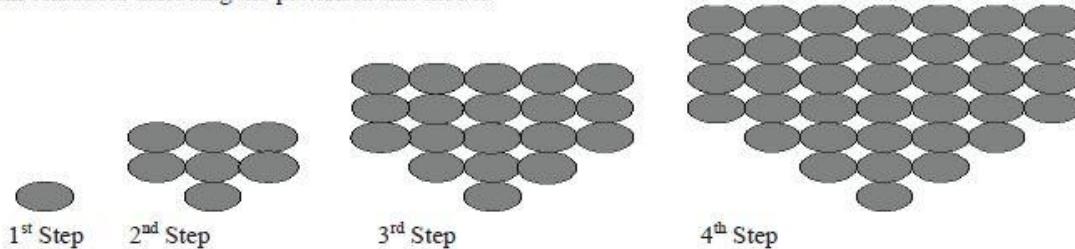
● Conclusion and Recommendations (構成主義的な教育の観点から)

- 教科書の型にはまったような問題を考慮に入れると、それは生徒の注意をひかない、潜在的能力を引き出すには都合が悪い。生徒は教科書にある問題のような同様のイベントを日常生活で遭遇しない。
 - (非日常的な問題を作らない) 教師による作問の重要性は明らかである。
- 生徒の経験を通じた作問や問題解決は構成主義アプローチ (生徒たちに自身で学習対象を理解する形を組み立てさせる教育) における重要な要素である。
 - 学んだ知識の利用や永続性が促される。
- 講義において、日常生活上の問題と知識との関連は促されるべきである
 - 生徒は日々遭遇するような問題に関連させることを促されるべきであり
 - 現実の問題との関連はカリキュラムの準備や生徒の選択する試験において利用されないといけない。

Appendixes

Appendix 1. Problem posing test

1. Consider a pattern which continue as $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots$, write down three different problem sentences including this pattern.
2. The number of balls in the under mentioned tables are organized according to a rule. Write down three different problem sentences including the pattern in this model.



3. Write down three different problem sentences convenient for the pattern of $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + \dots + 5 + 3 + 1$.

Appendix 2. Problem solving test

1. "A man earned 1 lira in a game of chance for the first day, he lost 4 liras in the second game, he earned 9 liras in the third game. He continued to play the game every month" Accordingly; he gained or lost in this way for the following games. Accordingly;
 - a. Indicate the profit-loss condition of the man at the end of the two years.
 - b. Find out how many months it would take for his profit to be 2850 liras.
2. "The number of young ants which are born in an ant colony is as follows according to months;
 - 1st month, 1 ant
 - 2nd month, 7 ants
 - 3rd month, 19 ants
 - 4th month, 37 ants
 - 5th month, 61 ants
 are born. The ant colony continues to breed in this way. Accordingly;
 - a. Find out the number of ants which will be born in the 7th month?
 - b. As the difference in the numbers of ants which are born in any two months is 48, find out these months.
3. "Two vehicles on A and B points are moving towards each other in a straight direction. The vehicle on the A point started to move an hour ago. These vehicles cover 1 km stretch of road in the first hour, they increase the covered road by 2 km in each hour. Accordingly;
 - a. Find out the total km of the road covered by these vehicles after 10 hours.
 - b. As the distance between these two vehicles is 1105 km, find out how much later they meet

作問テスト

1. 式に当てはまる3種類の問題を作れ。
2. ボールの数は下図のようにあるルールに従って編成される。このモデルのパターンを含んだ3種類の問題を作れ
3. 下の式と都合の良い3種類の問題を作れ。

問題解決テスト

1. ある男はゲームの初日に1リラを獲得し、2ゲーム目で4リラ失った。3ゲーム目では9リラ獲得した。彼は毎月ゲームを続けた。以下の問題に答えろ
 - a. 2年間後の損益状況は？
 - b. 2850リラを獲得するには何か月かかる？
2. アリの巣で以下の記述にしたがって月に若いアリが生まれる。
 - a. 7か月目のアリの数は？
 - b. 2か月で生まれたアリの数の差が48、それらの月は？
3. A地点とB地点にいる2台の乗り物がお互いに直線方向に近づいている。A地点の車は1時間前にスタートした。これらの車は初めの1時間で1km距離を伸ばす。毎時間2kmづつ距離を伸ばす
 - a. 10時間後のこれらの車の総合航続距離は？
 - b. 2台の車は1105 km離れている。この2台が合流するのは何時間後？