Trade-offs Between Grounded and Abstract Representations: Evidence From Algebra Problem Solving

Koedinger, K. R., Alibali, M. W., & Nathan, M, J.

(2008). Cognitive Science, Vol. 32, pp. 366-397.

1. Introduction

- 外的な問題表象は問題解決のパフォーマンスや学習に影響
  (Collins & Ferguson, 1993; Day, 1988; Kirshner, 1989; Zhang, 1997)
  - 例：ハノイの塔の外的表象の違いは正解率に影響
    (Kotovsky, Hayes, & Simon, 1985)
  - 外的表象固有の特性が，どのようにパフォーマンスや学習に影響しているのか
    → あまり知られていない
- 外的表象は，どの程度具体的か，もしくは，どの程度抽象的かという範囲で変化する
  (Paivio, 1986; Palmer, 1978)
  - 我々の考えでは，問題の複雑性と表象との間にはトレードオフの関係が成り立つ
    - 学習初期の段階で出題される容易な問題 → 具体的表象が有効
    - 学習後期の段階で出題される難しい問題 → 抽象的表象が有効
      - 問題によって表象を使い分ける必要がある
- 我々は，代数問題を使用して，このトレードオフの関係を検討する
  - 具体的表象の定義：明確で具体的なもの
    - 物理的な対象や日常的な出来事で示すことができる
      「テッドはウェイターです. 彼は, 6 時間働いて 66 ドルのチップを得ました. 彼のその日の総収入は 81.90 ドルでした．テッドの時給はいくらですか？」
  - 抽象的表象の定義：抽象的で簡潔なもの
    - 物理的な対象や日常的な出来事が除外されたもの
      - x * 6 + 66 = 81.90

2. Trade-offs in representational advantages

- 具体的表象と抽象的表象に関する先行研究から，それぞれの特性を示す(Table 1)
  (e.g., Koedinger & Nathan, 2004; Nunes, Schliemann, & Carraher, 1993; Paivio, Clark, & Khan, 1988; Day, 1988; S. H. Schwartz, 1971, 1972; Sloutsky, Kaminski, & Heckler, 2005)
  - 長期記憶へのアクセス頻度(Ease of LTM access)
    - 具体的表象には親近感があり，表象の理解には長期記憶が利用される
    - 抽象的な方程式(x，=，計算順序)の理解には長期記憶は利用されにくい
  - 信頼性(Reliability)：問題解決中のエラー数

- 具体的表象では，意味的冗長性によりエラーは減少する
- 抽象的表象では，意味的冗長性はなく，エラーは増加する

➢ 作業記憶の支援(WM support)，効率(Efficiency)
- 抽象的表象は簡潔であり，読み取り，操作，記述が容易である
  - 外的記憶の使用(紙に書き出す)が容易であり，作業記憶負荷を軽減できる
- 具体的表象では，把握する単語の数が多くなり，量的関係の操作が困難

3. Representational advantages in the acquisition of algebra skill

- 代数問題の複雑性と表象との関係について検討した先行研究(Koedinger & Nathan, 2004)
  - 高校生を対象に実験を行った
    - 抽象的な方程式の問題よりも具体的な文章題の方が正解率は高かった
      - 文章題で，多くの高校生は方程式を使用しない方略(Unwind 方略)を使用
  - Figure1 は実験で使用された文章題の例
    - Figure 1a は文章題と量的関係を示した図

      「母親が宝くじで当選しました．当選金額の内，彼女は 64 ドルを受け取り，残りを 3 人の息子に等分に分け与えました. 3 人の息子は 20.50 ドルずつ受け取りました．母親の宝くじの当選金額はいくらだったでしょう？」
    - Figure 1c は Unwind 方略をプロダクションルールで記述したもの
      - 代数の方程式を使用せず，代数計算の逆向きに問題を解決していく
    - Figure 1b は文章題と量的関係を示した図

      「ロザンヌは 15%値引きのジーンズを 38.24 ドルで買いました．ジーンズのもとの値段はいくらでしょう？」
      - x を 2 回使用．Unwinding 方略を使用できない
      - 代数方程式を使用する必要がある難易度の高い問題
    - Figure 1a の問題：Single-reference problem
    - Figure1b の問題：Double-reference problem
- 実験 1
  - 代数のスキルが低い大学生で，問題の複雑性と表象とのトレードオフの関係を検討
- 実験 2
  - 代数のスキルが高い大学生でも，実験 1 と同様のトレードオフがみられるかを検討

4. Experiment 1

4.1. Method

4.1.1. Participants

- 州立大学の学生 153 名．43 名は代数の初級コース，110 名は代数の中級コースに所属

4.1.2. Procedure

- 要因計画（Table 2）
  - 2(問題の複雑性：Single/ Double-reference problem)-参加者内×3(表象：Story-implicit operators/ Story-explicit operators/ Equations)-参加者内
- 各条件で 3 種類の問題を用意
  - 各条件で異なる問題を出題するため
  - 3 種類の問題の表象は，参加者間でカウンターバランスをとった
- 検証する仮説
  - Single-reference problem では文章題の方が容易に解決できる
  - Double-reference problem では代数方程式の方が容易に解決できる

4.1.3. Coding

- 各問題の正解，不正解が採点された
  - 問題解決方略が Table 3 の基準に従ってコーディングされた
    - 2 人のコーディングの一致率は 96%であった
  - 問題が不正解の場合，Table 4 の基準に従ってエラータイプがコーディングされた
    - 2 人の大まかなカテゴリーコーディングの一致率は 93%
    - 2 人の詳細なカテゴリーコーディングの一致率は 84%

4.2. Results and discussion

- Fig. 2 は各条件における問題の正解率
  - 2(問題の複雑性)×3(表象)分散分析の結果
    - 2 要因間に交互作用あり($F(2, 304) = 27.46$, $p < .0001$)
      - Single-reference problem
        - Story-implicit operators(79%) ≒ Story-explicit operators(77%)
        - Equations ＜ Story-implicit/-explicit operators
      - Double-reference problem
        - Story-implicit operators(21%) ≒ Story-explicit operators(22%)
        - Equations ＞ Story-implicit/-explicit operators
    - 問題の複雑性の主効果あり($F(1, 152) = 246.36$, $p < .0001$)
  - Single-reference problem では，方程式の問題よりも文章題の方が正解率は高かった
    - 先行研究(Koedinger & Nathan, 2004)と同様の結果
      - 先行研究の文章題は Story-explicit problem のみであった
        - Story-implicit problem でも，問題を言語で示す効果がみられた
      - 先行研究の参加者は高校生であった
        - 大学生でも同様の結果が得られた

- Table 5 は各条件における問題の正解率を示す
    - Single-reference problem
        - 文章題のとき正解率は高い(80%，71%，83%)
        - 方程式の問題のとき正解率には斑がある
            - 「mx + b = y」の式(79%，80%)
            - 「(x - c) / n = y」の式(23%)
                - テキストに頻繁に登場する形式で代数方程式を扱うことはできる
                - テキストに登場しない形式で代数方程式を扱うことができない
    - Double-reference problem
        - 方程式の問題のとき正解率は高い(71%，29%，41%)
            - 複数の x を参照する場合，文章題よりも方程式の問題が有効
- Table 6 は各条件における各問題解決方略の使用率と正解率を示す
    - 方略を大まかに 2 つに分類(Table 3 を参照)
        - Formal strategy：代数の方程式を使用した方略(algebra)
        - Informal strategy：代数の方程式を使用しない方略(algebra 以外)
    - 方略の使用率
        - 方程式の問題では，Informal strategy はほとんど使用されない
          (Single-reference problem：1%，Double-reference problem：1%)
        - 文章題では，Informal strategy が時々使用された
          (Single-reference problem：55%，Double-reference problem：27%)
            - 問題の外的表象が問題解決方略に影響
    - 方略の正解率
        - Single-reference problem の文章題
            - Formal strategy (73%)よりも Informal strategy (86%)で正解率は高い
                - Single-reference problem では Informal strategy が有効
        - Double-reference problem の文章題
            - Informal strategy (7%)よりも Formal strategy (37%)で正解率は高い
                - Double-reference problem では Formal strategy が有効

5. Experiment 2

- 数学的に洗練された学生
    - 実験 1 の参加者よりも，代数方程式を多く使用するだろう
        - 文章題では，意味的冗長性を利用して問題を解決するかもしれない
    - 検証する仮説
        - 洗練された学生でも，実験 1 の参加者と同様に，Single-reference problem では方程式の問題よりも文章題で正解率は高い

5.1. Method

5.1.1. Participants

- カーネギーメロン大学の学生 65 名．参加者の Math SAT の平均点は 719 点であった

5.1.2. Procedure

- 要因計画
  - 2(問題の複雑性：Single/ Double-reference problem)-参加者内 × 2(表象：Story-implicit operators/ Equations)-参加者内
- Table 7 は，実験 2 で出題された問題の例を示す
  - Single-reference problem では，x を 1 回使用する問題と x を使用しない問題を出題
  - Double-reference problem は実験 1 と同様

5.1.3. Coding

- 各問題の正解，不正解が採点された
  - 問題解決方略が Table 3 の基準に従ってコーディングされた
    - 2 人のコーディングの一致率は 96%であった
  - 問題が不正解の場合，Table 4 の基準に従ってエラータイプがコーディングされた
    - 2 人の大まかなカテゴリーコーディングの一致率は 93%
    - 2 人の詳細なカテゴリーコーディングの一致率は 85%

5.2. Results and discussion

- Fig. 3 は各条件における問題の正解率
  - 2(問題の複雑性)×2(表象)分散分析の結果
    - 2 要因間に交互作用あり($F(1, 64) = 17.89$, $p < .0001$)
      - Single-reference problem
        - Story operators ＞ Equation($F(1, 64) = 5.82$, $p < .02$)
      - Double-reference problem
        - Story operators ＜ Equation($F(1, 64) = 12.74$, $p < .001$)
- Table 7 は各条件における問題の正解率を示す
  - Single-reference problem
    - 文章題のとき正解率は高い(97%，94%)
  - Double-reference problem
    - 方程式の問題のとき正解率は高い(92%，75%，94%)
- Table 6 は各条件における各問題解決方略の使用率と正解率を示す
  - 方略の使用率

- 方程式の問題では，Informal strategy はほとんど使用されない
  (Single-reference (start unknown)：11%，Double-reference problem：4%)
- 文章題では，方程式の問題のときよりも，Informal strategy が使用された
  (Single-reference (start unknown)：32%，Double-reference problem：12%)
  - 問題の外的表象が問題解決方略に影響

- 方略の正解率
  - Double-reference problem の文章題
    - Informal strategy (58%)よりも Formal strategy (80%)で正解率は高い
      - 実験 1 と同様
  - Single-reference (start unknown)の文章題
    - Informal strategy (86%)よりも Formal strategy (98%)で正解率は高い
      - 実験 1 と異なる
      - 熟達者は主に Formal strategy を使用して問題を解決
        - 方程式の問題(88%)よりも文章題(98%)で正解率は高い
          → 熟達者でも意味的冗長性を利用している

6. Sources of the representation-complexity trade-off

- Single-reference problem における意味的冗長性の効果，Double-reference problem におけるシンボルの効果とは，具体的には何か？
- Fig. 4 は Single-reference problem における意味的冗長性の効果の例を示している
  - 参加者 87(Fig. 4a，4b)，参加者 46(Fig. 4c，4d)
    - 参加者 87 は，方程式の問題(Fig. 4b)で 64 ドルを誤って引き算
    - 参加者 46 は，文章題(Fig. 4c)で 64 ドルを正しく足し算
- Fig. 5 は Double-reference problem におけるシンボルの効果の例を示している
  - 参加者 19(Fig. 5a，5b)，参加者 82(Fig. 5c，5d)
    - 参加者 19(Fig. 5b)，参加者 82(Fig. 5d)は，文章題で，文章の内容を誤ってシンボル化
    - しかし，2 人とも方程式の問題を正しく解答(Fig. 5a，5c)

6.1. Sources of the verbal advantage on single-reference problems

- Table 4 の基準に従って実験 1，2 のエラータイプをコーディング
  - No response：何も書かれていない
  - Arithmetic errors：正しい解法を用いているが，計算ミスをしている
  - Conceptual errors：上記以外の全ての間違い
- 具体的表象は，長期記憶から引き出される具体的な知識に基づいて生成される(Table 1)
  - もし，適切な知識を引き出すことができなければ，問題を解答できない

- ✧ Single-reference problem では，特に代数の初心者は，方程式の問題で No response が増加すると予測される
- 具体的表象の意味的冗長性は，具体的な知識を適用させる手がかりとなる(Table 1)
  - ➢ 単純な数字の計算よりも，数字にドルなどの意味的冗長性を与えると計算ミスは減少 (Koedinger & Nathan, 2004)
    - ✧ Single-reference problem では，代数の熟達者でも，意味的冗長性のない方程式の問題で Arithmetic errors が増加すると予測される
- No response は親近感に関連．Arithmetic errors は信頼性(問題解決中のエラー)に関連
  - ➢ Conceptual errors は，紙には何かが書かれ，Arithmetic errors よりもひどいエラー
    - ✧ 代数の中級者が生成しやすいと考えられる
- Fig. 6 は Single-reference problem においてエラーが生じた問題の割合
  - ➢ 実験 1 の参加者(代数の初級，中級コースの学生)
    - ✧ 文章題で Conceptual errors が著しく減少(方程式：21% → 文章題：8%)
      - 意味的冗長性によって Conceptual errors が減少
  - ➢ 実験 2 の参加者(代数の熟達した学生)
    - ✧ 文章題で Arithmetic errors が著しく減少(方程式：6.2% → 文章題：1.5%)
      - 意味的冗長性によって Arithmetic errors が減少
        - – 熟達者でも，意味的冗長性の効果がみられた

6.2. Sources of the symbolic advantage on double-reference problems

- Double-reference problem の文章題を Informal な方略で解決することも可能
  - ➢ その場合，方程式のシンボルを操作するよりも，作業記憶負荷は高くなる
    - ✧ Fig. 1b のジーンズの文章題の Informal な解法
      - ジーンズの値段引くジーンズの値段掛ける.15
      - 1 掛けるジーンズの値段引くジーンズの値段掛ける.15
      - ジーンズの値段掛ける.85 が 38.24 ドル
    - ✧ Fig. 1b のジーンズの文章題の Formal な解法
      - $x - .15x = 1x - .15x = (1 – 1.5)x = .85x = 38.24$
        - – 簡潔に外化でき，作業記憶負荷を削減することができる
- Double-reference problem の文章題では，Informal strategy はあまり使用されなかった
  - ➢ 実験 1 の文章題：Single-reference problem−55%，Double-reference problem−27%
  - ➢ 実験 2 の文章題：Single-reference problem−62%，Double-reference problem−12%
    - ✧ 参加者は，Formal と Informal な方略のコストの違いに敏感であった

7. General discussion

- 先行研究(Koedinger & Nathan, 2004)

- 抽象的な方程式の問題よりも具体的な文章題の方が正解率は高かい

- 今回の実験
  - 複雑性の高い問題では，抽象的な方程式の問題の方が正解率は高いことを示した
    - つまり，問題の複雑性と表象との間にはトレードオフの関係が成り立つ
      - 容易な問題　→　言語で示される具体的表象の効果がある
      - 難しい問題　→　シンボルで示される抽象的表象の効果がある
        - このようなトレードオフは数学の熟達者にも現れる

7.1. Benefits of grounded representations

- 具体的表象には親近感があり，記憶の負担が少ない
  - x などの抽象的表象は日常的にあまり使用されない
  - x という表現よりも How much などの表現には親近感がある
    - 文章による物語は，具体化または再現しやすい
      (Glenberg et al., 2007; Lakoff & N´unez, 2000)
- 具体的表象は，意味的冗長性を与え，エラーを減少させる
  - 実験 1 の参加者(代数の初級，中級コースの学生)
    - 文章題における親近感によって正解率が向上する
  - 実験 2 の参加者(代数の熟達した学生)
    - 文章題の意味的冗長性によって計算ミスが減少する

7.2. Is it just about translation?

- Double-reference problem では，文章題よりも方程式の問題で正解率は高かった
  - 方程式の方が，容易にシンボルを操作，外化することができる
    - 作業記憶負荷を削減することにもつながる
- 疑問：Double-reference problem の文章題では，文章を方程式に変換するコストがかかる
  → だから，文章題の正解率が低くなったのでは？
    - 問題解決時間の測定は行っていない．今回の実験からいえること
      - Double-reference problem の文章題における正解率(Table 6)
        - 実験 1：Formal–37%，Informal–7%
        - 実験 2：Formal–80%，Informal–55%
          - 文章を方程式に変換しなくても文章題の正解率は低い
          - 更に検討する余地はある

7.3. Does the representation-complexity trade-off extend to other forms of complexity?

- 今回の実験で示した問題の複雑性と表象とのトレードオフ
  - Table 1 に具体的表象と抽象的表象の特徴を示した

- ✧ Table 1 は拡張される必要がある
  - マイナスの数を扱う場合，文章題よりも方程式の問題の方が正解率は高い (Verzoni & Koedinger, 1997)
  - Double-reference よりも Single-reference problem の方が難しい場合もある
    - Single-reference problem：$(x - 64) \div 3 = 20.50$
    - Double-reference problem：$x + (x + 6) = 38$
      - Single-reference problem の方が正解率は低い
      - 計算が困難な数字の組み合わせ，操作の数が多い

7.4. A developmental model of algebra problem-solving skill acquisition

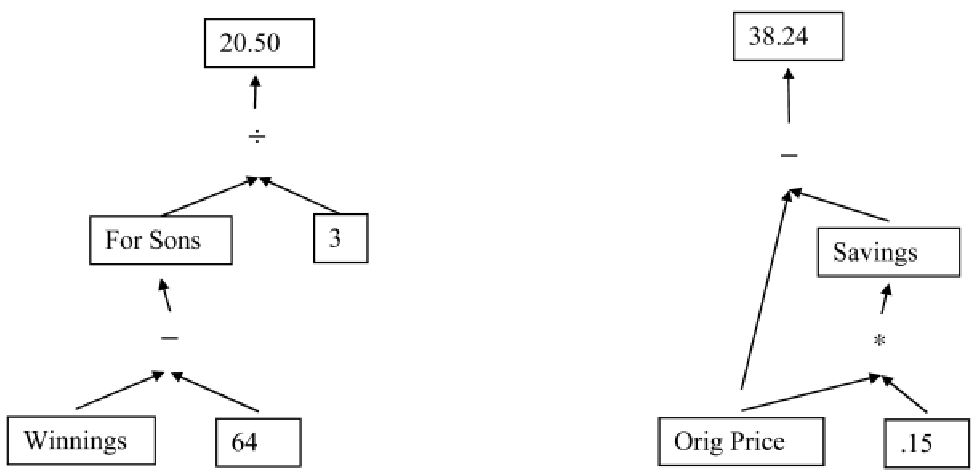
- 我々の主張する代数の問題解決スキルを獲得するモデル
  a) 言語的な Single-reference problem
  b) シンボル化された Single-reference problem
  c) シンボル化された Double-reference problem
  d) 言語的な Double-reference problem
  - ➢ この順に代数のスキルが獲得される
    - ✧ このようなモデルは，授業カリキュラム，授業デザインの際に有効である

Table 1
Trade-offs in computational characteristics of more grounded versus more abstract representations

		Type of Representation and Level of Benefit		
Benefit	By Means of Property	Grounded	⇔	Abstract
Ease of LTM Access	Familiarity	Higher		Lower
Reliability	Redundancy	Higher		Lower
WM support	Externalizability	Lower		Higher
Efficiency	Conciseness	Lower		Higher
	Examples:	Stories		Equations

Note. LTM = Long-term memory; WM = Working memory.

A B



Mom won some money in a lottery. She kept \$64 for herself and gave each of her 3 sons an equal portion of the rest of it. If each son got \$20.50, how much did Mom win?

$(X - 64) \div 3 = 20.50$

Roseanne just paid \$38.24 for new jeans. She got them at a 15% discount. What was the original price?

$X - 0.15X = 3824$

C

Production rule to "unwind" quantitative relations:

IF the output of a quantitative relation is known
and one input is known and the other input is unknown
THEN
Set subgoals to find the inverse of the operator
And to apply it to the known output and input to find the unknown input

Fig. 1. Double-reference problems are more complex than single-reference problems because they thwart the unwind strategy that works on single-reference problems. (a) Examples of analogous single-reference story and equation problems and their underlying quantitative structure. (b) Examples of analogous double-reference story and equation problems and their underlying quantitative structure. (c) An English version of the unwind production rule in the EAPS cognitive model.

Table 2
Six problem categories illustrating two difficulty factors used in Experiment 1: representation and number of unknown references

	Number of Unknown References	
Representation	Single	Double
Story-implicit operators	Mom won some money in a lottery. She kept \$64 for herself and gave each of her 3 sons an equal portion of the rest of it. If each son got \$20.50, how much did Mom win?	Roseanne just paid \$38.24 for new jeans. She got them at a 15% discount. What was the original price?
Story-explicit operators	After hearing that Mom won a lottery prize, Bill took the amount she won and subtracted the \$64 that Mom kept for herself. Then he divided the remaining money among her 3 sons giving each \$20.50. How much did Mom win?	Roseanne bought some jeans on sale for \$38.24. To figure that sales price, the salesperson took the original price, multiplied it by the 15% discount rate, and then subtracted the outcome from the original price. What was the original price?
Equation	Solve for the unknown value, X: $(X - 64) \div 3 = 20.50$	Solve for the unknown value, X: $X - 0.15X = 38.24$

Table 3
Strategy codes and coding definitions

Strategy	Definition
Algebra	Student uses algebraic manipulations to derive solution
Arithmetic	Student works forward to derive solution using the operations presented in the problem (applies primarily to the result-unknown problems used in Experiment 2)
Unwind	Student works backward to derive solution using inverse operations
Untangle	Student informally combines problem constraints and then works backward to derive solution using inverse operations
Guess and test	Student generates and tests potential solutions
Answer only	Student provides solution without showing any written work

Table 4
Error codes and definitions (broad categories used in Fig. 6 are in italics)

Error Type	Definition
No response	Student leaves problem blank
Conceptual errors	
Give up	Student performs some work but does not provide a final answer
Order of operations	Student violates order of operations rule
Comprehension	Student shows evidence of either incorrect interpretation of problem constraint(s) or a failure to produce external forms (equations or arithmetic) consistent with those constraints
Missing operator	Student does not perform one of the operations presented in the problem
Bad algebra	Student performs an incorrect algebraic manipulation, such as subtracting from both sides of the plus sign rather than both sides of the equal sign
Inversion	Student fails to invert an operator (e.g., change + to −) that needs to be inverted to solve the problem
Answer only	Student writes only a number and the number is the wrong
Arithmetic error	Student adds, subtracts, multiplies, or divides wrong
Copy slip	Student miscopies a value given in the problem or previously generated

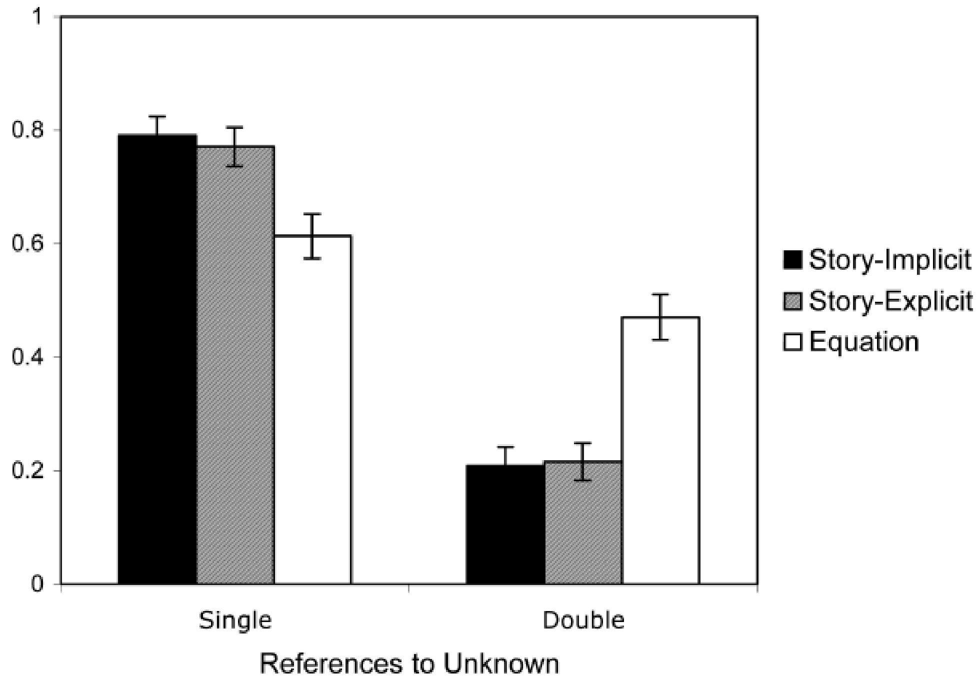


Fig. 2. The interaction of problem complexity (number of references to the unknown) and representation in Experiment 1. Error bars represent standard errors.

Table 5
Problems used and proportion of participants who solved each problem correctly in Experiment 1

Story Problems		Equations	
Problem	Proportion of Participants who Solved Correctly	Problem	Proportion of Participants who Solved Correctly
	Single-Reference Problems		
Laura bought 7 donuts and paid \$0.12 extra for the box to hold them. If she paid \$2.57 total, what is the price per donut?	0.80	$7X + .12 = 2.57$	0.79
Ted works as a waiter. He worked 6 hours in one day and also got \$46 in tips. If he made \$65.50 that day, how much per hour does Ted make?	0.71	$6X + 46 = 65.50$	0.80
Mom won some money in a lottery. She kept \$64 for herself and gave each of her 3 sons an equal portion of the rest of it. If each son got \$20.50, how much did Mom win?	0.83	$(X - 64) \div 3 = 20.50$	0.23
	Double-Reference Problems		
There are 38 students in class. If there are 6 more girls than boys, how many boys are in the class?	0.54	$X + (X + 6) = 38$	0.71
Roseanne just paid \$38.24 for new jeans. She got them at a 15% discount. What was the original price?	0.04	$X - 0.15X = 38.24$	0.29
You are in Paris, France, and you want to exchange your dollars for French Francs (FF). The first exchange store gives you 5.7 FF per dollar but charges 22 FF for each exchange. The second exchange store gives you 5.4 FF per dollar and does not charge a fee. When are the charges from the two stores the same? In other words, what amount of dollars results in the same charge from both stores?	0.05	$5.7X - 22 = 5.4X$	0.41

Note. The story problems shown are the implicit operator versions, but the data are the mean proportion correct for both versions.

Table 6
Percentage of problems solved and solved correctly with informal and formal strategies for story problems and equations

	Story Problems				Equations			
	Informal		Formal		Informal		Formal	
	% Used	% Correct	% Used	% Correct	% Used	% Correct	% Used	% Correct
			Experiment 1					
Single-reference (start unknown)	55	86	42	73	1	50	94	65
Double-reference	27	7	52	37	1	0	90	52
			Experiment 2					
Single-reference (result unknown)	91	97	9	100	68	89	32	95
Single-reference (start unknown)	32	86	68	98	11	86	88	88
Double-reference	12	58	88	80	4	71	96	88

Table 7
Problems used and proportion of participants who solved each problem correctly in Experiment 2

Story Problems		Equations	
Problem	Proportion of Participants Who Solved Correctly	Problem	Proportion of Participants Who Solved Correctly
	Single-Reference Problems		
Anne is in a rowboat on a lake. She is 800 yards from the shore. She rows toward the shore at a speed of 30 yards per minute. How far is Anne from the shore after 23 minutes?	0.97	$800 - 30 * 23 = y$	0.91
Kim is saving up for a mountain bike that costs \$600. She earns \$20 per week by babysitting every Saturday afternoon. She can save all of the money that she earns. If Kim only needs to save \$260 more, how many weeks has she already saved?	0.94	$600 - 20 * x = 260$	0.88
	Double-Reference Problems		
There are 38 students in class. If there are 6 more girls than boys, how many boys are in the class?	0.86	$X + (X + 6) = 38$	0.92
Roseanne just paid \$38.24 for new jeans. She got them at a 15% discount. What was the original price?	0.63	$X - 0.15X = 38.24$	0.75
You are in Paris, France, and you want to exchange your dollars for French Francs (FF). The first exchange store gives you 5.7 FF per dollar but charges 22 FF for each exchange. The second exchange store gives you 5.4 FF per dollar, and does not charge a fee. When are the charges from the two stores the same? In other words, what amount of dollars results in the same charge from both stores?	0.82	$5.7X - 22 = 5.4X$	0.94

Note. The numbers shown in this table illustrate one of the two number sets used in the experiment. Each student saw a story problem using one number set and a matched equation using the other.

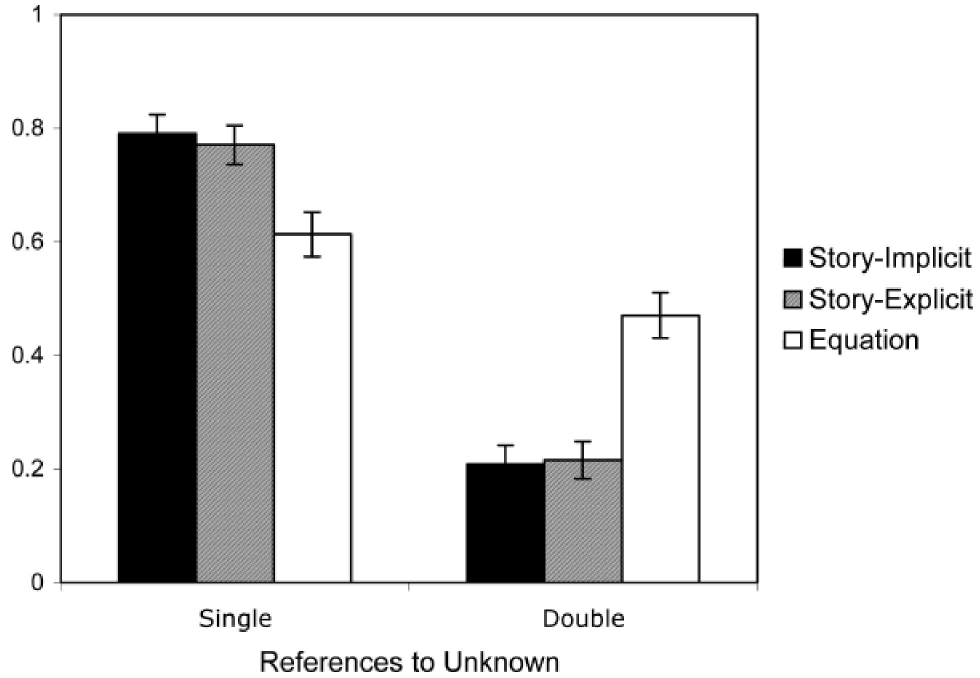


Fig. 2. The interaction of problem complexity (number of references to the unknown) and representation in Experiment 1. Error bars represent standard errors.

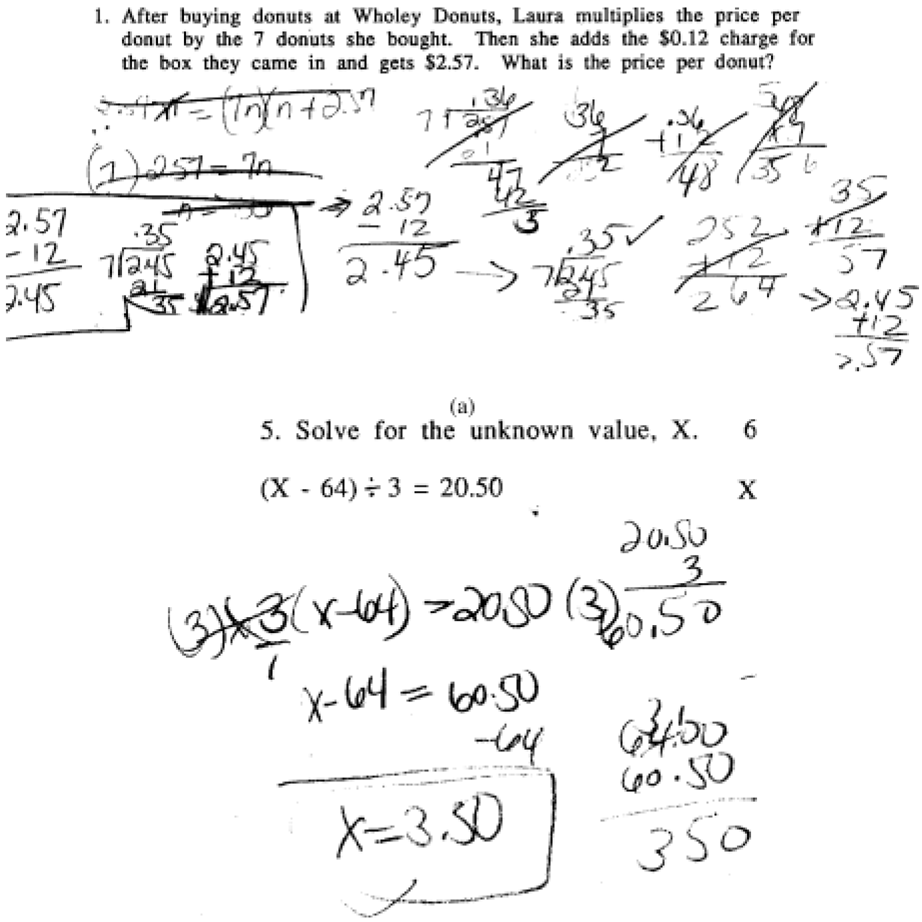
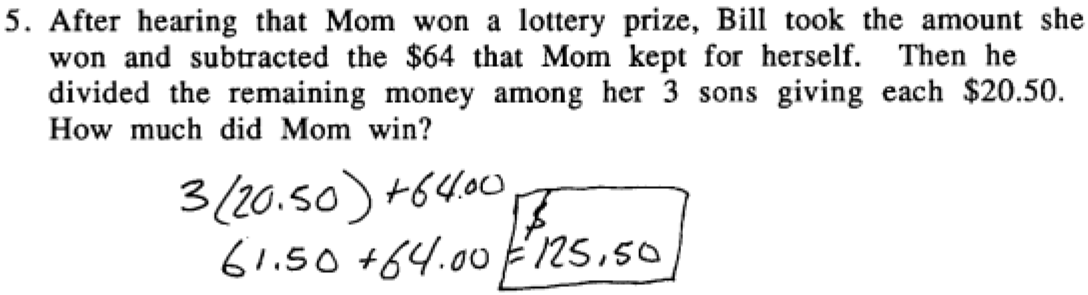
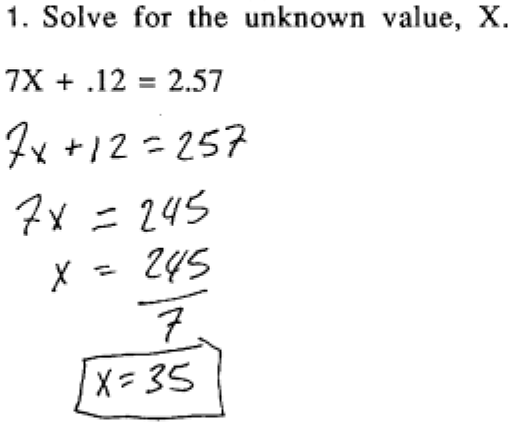


Fig. 4. Student work illustrating the verbal advantage on single-reference problems. (a) Student 87 successfully using unwind on the Donuts single-reference story problem. (b) Student 87 (same as in a) incorrectly using equation solving on the single-reference Lottery equation. The conceptual error is in the second step where the student subtracts 64 rather than adding 64 to both sides. (c) Student 46 successfully using unwind on the Lottery single-reference story problem. Note indications of money semantics in the addition of "$ " in the final answer and of ".00" to the given value of "64." Such extra semantic relations coming from the grounded story may explain the contrast between the student's success here and the same student's error on an abstract equation, shown just below (d). (d) Student 46 (same as in c) incorrectly using equation solving on the single-reference Donuts equation. The error is in the first step where the student is "multiplying through" to convert decimal terms, .12 and 2.57, to whole numbers but does not know or retrieve the semantic requirement that the conversion must be applied to all terms, including converting 7x to 700x. (Continued)

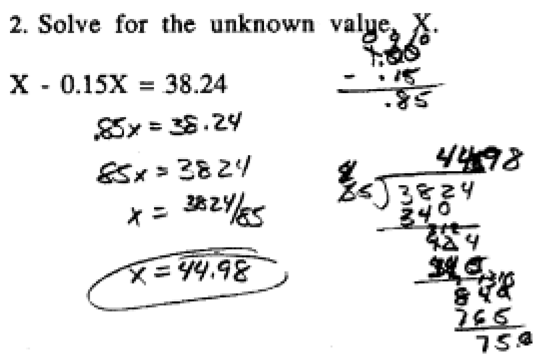


(c)

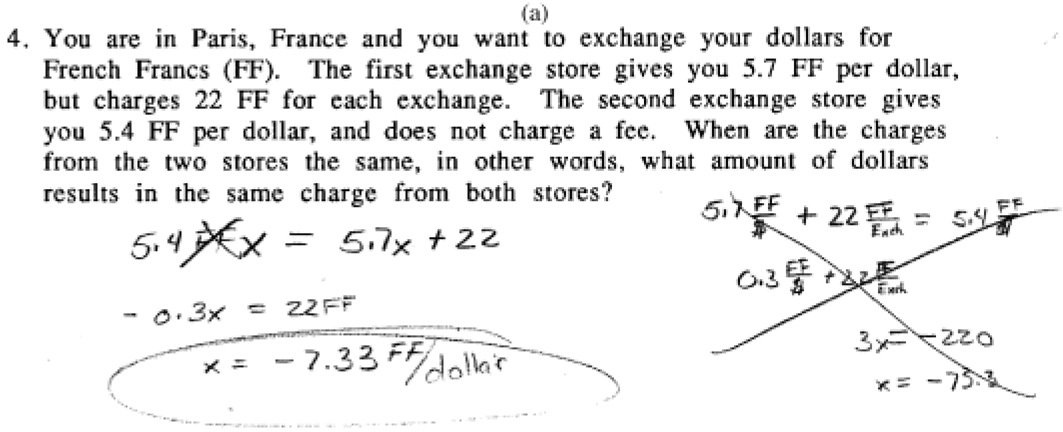


(d)

Fig. 4. (*Continued*)

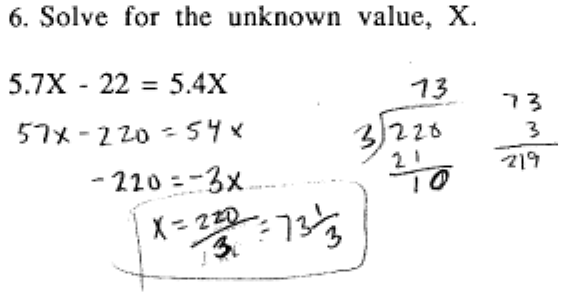


(a)

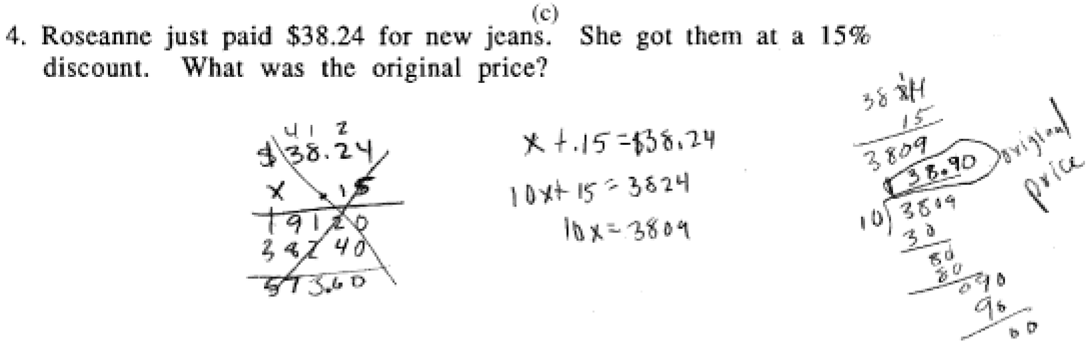


(b)

Fig. 5. Student work illustrating the symbolic advantage on double-reference problems. (a) Student 19 successfully solves the double-reference equation for the discount problem. (b) Student 19 fails on the double-reference story problem (Exchange story). The student performs an incorrect translation to an equation (the "+ 22" should be added to 5.4x, not 5.7x) and then does not appear to notice that the negative result of equation-solving (−7.33) is an unlikely answer to this problem situation. (c) Student 82 successfully solves the double-reference equation for the Exchange problem. (d) Student 82 fails on the Discount story problem. The student attempts both an incorrect informal strategy (multiplying 38.24 by.15 on the left) and an incorrect translation to an equation ("x + .15" should be "x − .15x"). (Continued)



(c)



(d)

Fig. 5. (*Continued*)

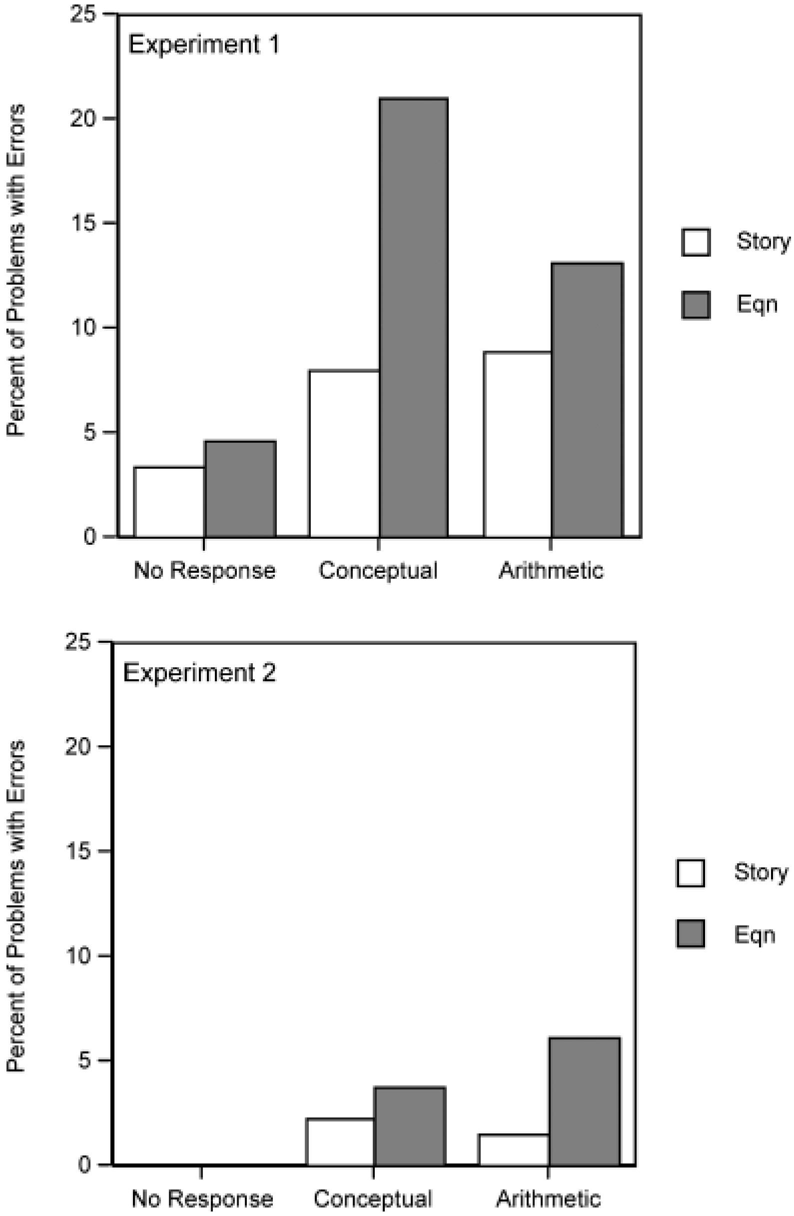


Fig. 6. Percentage of single-reference problems with errors of different types. In Experiment 1 (top), the verbal advantage is driven primarily by fewer Conceptual Errors on story problems than equations. In Experiment 2 (bottom), it is driven primarily by fewer Arithmetic Errors on story problems than equations.