

## The dynamics of insight: Mathematical discovery as a phase transition

Damian G. Stephen, Rebecca A. Boncodd, James S. Magnuson, and James A. Dixon

*Memory & Cognition* (2009), 37(8), 1132-1149

### ◇ 新しい方略の自発的な発見

- ▶ 認知システムがそれ自体の活動を通して自発的に変化する (Siegler & Araya, 2005)
  - 繰り返しにより類似した事象の共通点を検出する (Gentner & Namy, 1999)
- ▶ 行動を通して起こる新しい認知構造の出現を自己組織化の一例として考える

### ◇ Self-Organization of New Structure

- ▶ 様々な分野における新しい構造の出現への取り組み (Jensen, 1998; Webster & Goodwin, 1996; Hilborn, 1994; Lorenz, 1963; Harrison & Hillier, 1985)
  - ・ microelements の相互作用が変化する
  - ・ 新しい属性が作られる
  - ・ → 異なる組織化へ
  - ・ 非線形ダイナミクスによる支配
- ▶ 心理学では
  - Connectionist model (McClelland, Rumelhart, & PDP Research Group, 1986)
    - ・ microelements の相互作用が認知を作る
    - ・ 上記の流れと同様に自己組織化が起こる
    - ・ 非線形ダイナミクスにより支配される (Hebbian and SOM algorithms; McClelland, 2006; Silberman, Bentin, & Miikkulainen, 2007)
- ▶ 非線形ダイナミクスは新しい構造の出現における行動の微小な変動を予測する
  - 新しい構造への遷移に先立ち entropy とべき乗則行動の変化が観察される

### ◇ Entropy and Power-Law Behavior

- ▶ Entropy とべき乗則行動の変化による相転移の予測は制約により説明される
  - 制約は microelements を結合する
- ▶ Entropy = 安定性, 乱雑性の指標
  - Entropy は制約の数と逆相関する (Kugler & Turvey, 1987)
  - Microelements が結合されている

- Microelements が結合に基づき秩序だって実行される = entropy が低い
- Microelements が結合されていない
  - Microelements が無秩序に乱雑に実行される = entropy が高い
- ▶ 非線形システムが相転移に近づくと
  - 制約により結合された microelements がばらける → 乱雑に
  - 新しい構造で制約が生まれる → entropy の低下
- ▶ べき乗則行動
  - 非線形関係性の一種
  - 入れ子構造を反映する = low level へ行くと microelements の数が増える
- ▶ 制約により microelements はユニットとして働いている
  - 相転移に近づくと入れ子の各レベルで制約が崩れる
  - 各レベルにおける活動の数が増える → べき乗指数の増加
  - 新しい構造の出現 → べき乗指数の減少 (Grebogi, Ott, Romeiras, & Yorke, 1987)
- ▶ 予測
  - Entropy とべき乗指数の変化は認知システムの変化を予測するだろう
- ▶ ローレンツモデルの場合 (Lorenz, 1963)
  - 突然のシフトも実演する
- ▶ そのときの entropy とべき乗指数は？ (Figure 2)
  - パラメータを変化させると
    - 類似した小さなスペースから大きなスペースへ = 相転移
    - シフト時に entropy とべき乗指数の増加と減少が見られる
- ☆ Predicting the Emergence of Cognitive Structure
  - ▶ 新しい認知構造 = 相転移
  - ▶ 使用課題
    - ギア問題 (Figure 1)
      - ターゲットのギアがどちらに回るか答える
  - ▶ 最初の方略 (Dixon & Bangert, 2004; Dixon & Kelley, 2006, 2007)
    - 順番にどちらに回るか、たどっていく

- ▶ 新しい方略
  - parity
    - ・ 偶数ならば最初と同じ方向, 奇数ならば最初と反対の方向
- ▶ より細かく取得するために眼球運動を用いる
- ▶ 仮説
  - 相転移に先立って **entropy** とべき乗指数の増加, 減少が観察される

## ★ METHOD

### ◇ Participants

- ▶ 学部生 33 名

### ◇ Materials and Procedure

- ▶ 電車レースの文脈上で行う
  - 正解できたら燃料補給
- ▶ ギア問題は **driving gear** (時計回り), **intermediate gear**, **target gear** からなる
  - **target gear** がどちらに回るか, または詰まるかを予測する
  - 予測後にはフィードバックが与えられる
  - 全 32 試行
- ▶ 発話からいつ **parity strategy** を発見したかをコーディング
  - ギアを数える
  - 偶数, 奇数を利用する

### ◇ Quantifying Angular Change in Point-of-Gaze

- ▶ 注視点の変遷を調べるために変化角を求めた (Figure 3, 4)
  - 1 フレームでどれだけ, 上下左右に移動したか

### ◇ Phase-Space Reconstruction

- ▶ 位相空間への再構築
  - 位相空間内の各ポイントが特定の **state** を示す
- ▶ (方法は省略 ※1 変数とその時間遅れを利用して構築)
- ▶ 例 Figure 5

### ◇ RQA

- ▶ 再帰定量化分析 (recurrence quantify analysis)
- ▶ 再帰 (Figure 6)
  - 位相空間内で元の位置 (十分近く) へ戻ってくる
- ▶ 再帰をブロック化して連続的な再帰をつなぐ (ラン)
- ▶ 再帰率: 系の安定性 (再帰がどれほど起こったか)
  - 高い = 同じようなところを通る = 安定性が高い
- ▶ Entropy: 軌道の複雑性
  - ランの長さを用いて算出
  - 高い = ランの長さにはばらつきがある = 軌道が複雑 (乱雑) である

## ★ RESULTS

### ◇ Descriptive Statistics on Performance and Strategy

- ▶ Parity 方略発見前
  - 順番にたどっていく or 回転方向により分類する
- ▶ 発見前でも十分に正答
- ▶ Parity 方略発見者は 22 / 33 名

### ◇ Organization of Analyses

- ▶ 分析には最尤推定法を利用
  - モデルの適合度評価法 -2 対数尤度
  - 自由度 1 の場合, 3.84 を超えたら  $p < .05$  で有意

### ◇ Response Time and Accuracy (Figure 7)

- ▶ 正答率
  - 全試行においてほぼ正しく正解
- ▶ ロジスティック回帰分析
  - 試行を通して変化しない
    - ・  $B = 0.008, SE = 0.01; \text{change in } -2LL, \chi^2(1) = 0.62, \text{ n.s.}$
  - Parity 方略を使用し始めると正答率上昇
    - ・  $B = 1.64, SE = 0.38; \text{change in } -2LL, \chi^2(1) = 25.08$
  - Parity 方略の使用と試行間の変化に交互作用はない
    - ・  $B = 0.013, SE = 0.05; \text{change in } -2LL, \chi^2(1) = 0.06$
- ▶ Parity 方略の使用は正答率を高めるが, 正答率の改善量には寄与しない

#### ◇ 反応時間

##### ▶ 成長曲線モデル

- 試行を通じて変化しない
  - ・  $B = -0.05$ ,  $SE = 0.03$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 1.29$ , n.s.
- 開始時点で参加者間の違いがある
  - ・  $\sigma^2 = 37.24$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 76.30$
- 参加者間の違いと試行中の変化との交互作用はない
  - ・  $\sigma^2 = 0.005$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 0.26$
- Parity 方略の開始前後の反応時間に差はない
  - ・  $B = -2.03$ ,  $SE = 1.05$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 2.95$ , n.s.
- 発見後には反応時間の素早い減少が見られる
  - ・  $B = -0.20$ ,  $SE = 0.09$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 4.13$

#### ◇ Number and Duration of Fixations (Figure 8)

- ▶ 注視回数は試行が進むと減少する
  - $B = -0.34$ ,  $SE = 0.05$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 27.15$
- ▶ 始めから個人差が存在する
  - $\sigma^2 = 63.30$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 121.32$
- ▶ 個人差が試行を通じた注視回数の減少率に影響する
  - $\sigma^2 = 0.03$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 6.50$
- ▶ 試行<sup>2</sup>により変化が捉えられる
  - $B = 0.016$ ,  $SE = 0.004$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 20.06$
  - 正の係数 = 注視回数の減少率は下がっていく
- ▶ 注視時間は課題を通して変化しない
  - 個人, 交互作用もない
- ▶ Parity 方略の開始は注視回数にも時間にも影響しない

#### ◇ Descriptive Statistics for RQA Parameters

- ▶ 試行ごとに RQA を行う
  - 時間遅れの設定は Abarbanel (1996) にならう
- ▶ (細かい方法は省略)

◇ Predicting the Discovery of Parity

◇ Entropy

▶ Figure 9

- 発見者 発見から6つ前の試行
- 未発見者 未発見の全試行を利用

▶ 2次関数に定量化

- 切片, 直前試行, 直前試行<sup>2</sup>を含む直交多項式を作成

▶ ベースモデルは以下の固定効果を含む

- 切片 ( $B = 0.32$ ,  $SE = 0.14$ ), 直前試行 ( $B = 0.034$ ,  $SE = 0.037$ ), 直前試行<sup>2</sup> ( $B = -0.015$ ,  $SE = 0.035$ ), ターゲット試行 ( $B = 0.0003$ ,  $SE = 0.005$ ), 再帰率 ( $B = 0.21$ ,  $SE = 0.005$ )

▶ 以下のランダム効果を含む

- 切片 ( $\sigma^2 = 0.001$ ), 直前試行 ( $\sigma^2 = 0.21$ ), 直前試行<sup>2</sup> ( $\sigma^2 = 0.14$ )

▶ 発見が起こったかどうかを示す変数を投入する

- 結果の係数はエントロピーの変化を捉えるパラメータが発見と未発見で異なることを示す

- ・ 発見において直前試行<sup>2</sup>は有意な効果を持つ

$$B = -0.44, SE = 0.196; \text{change in } -2LL, \chi^2(1) = 4.99$$

- ・ 直前試行は持たない

$$B = -0.34, SE = 0.21; \text{change in } -2LL, \chi^2(1) = 2.57$$

- 係数が負 = 上に凸

- ・ 急激な上昇と減少を示す

▶ 推定二次成長曲線モデルにおけるパラメータを算出

▶ 離散的な生存時間分析

- 各ポイントにおいてターゲット試行との最小二乗直交回帰を行うのと同じ
- 直前試行と直前試行<sup>2</sup>が有意にモデルのフィットを向上させる

- ・  $B_s = 6.94$  and  $=6.77$ ,  $SEs = 4.65$  and  $3.56$ , respectively; change in  $-2LL$ ,  $\chi^2(2) = 6.73$

- 特に直前試行<sup>2</sup>が主に貢献する

▶ 新しい方略の発見に先立ち entropy の上昇と減少が起こる

#### ◇ Power-law behavior (Figure 10)

- 高速フーリエ変換により振幅スペクトルに分解
- 各周波数における正弦波の振幅の絶対値を二乗
  - ・  $\text{Power} = \text{Amplitude}^2$  = パワースペクトラム
- log-log プロットの傾きがべき乗指数
- ▶ 発見者は発見前までを利用
- ▶ 成長曲線分析
  - 発見者において試行<sup>2</sup>の寄与が有意に大きい
    - ・  $B = -0.00004$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 9.60$
  - 最初の個人差がある
    - ・  $\sigma^2 = 0.002$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 146.00$
- ▶ 発見のタイミングにより異なるはずである
  - タイミングを level two predictor として利用する
  - 発見のタイミングが早いほど増減が急速
    - ・  $B = -0.0001$ ; change in -2LL,  $\chi^2(1) = 4.90$

#### ★ DISCUSSION

- ▶ 新しい数学的表象の発見は動的組織化の指標により予測されることを示した
  - Entropy の増加と減少
  - べき乗行動は構造の緩和により増加し、融合により減少する
- ▶ 先行研究と一致 (Stephen et al., in press)

#### ◇ 先行研究への貢献

- ▶ 本研究は自己組織化が概念レベルの自発的な新しい構造化にも拡張されることを示した (Dale, Roche, Snyder, & McCall, 2008; Spivey, 2007; Spivey & Dale, 2006)
  - 認知は自己組織化され、複雑な非線形ダイナミクスに特徴づけられる
  - 新しい構造は多種多様の、連続的な microelements 間の交互作用により起こる
- ▶ べき乗則行動は他の認知的パフォーマンスにも表れる
  - 練習と速さなど (e.g., Lee & Anderson, 2001; Palmeri, 1999; Rickard, 1997)
- ▶ 本研究では 1 試行内のマイクロレベルの変動にもべき乗関係が観察されることを示した
  - このようなことなるレベルでの関係は関連づけられるだろう
- ▶ 多くの自己組織化に関する認知計算機モデルを補足する

- 多くのモデルはヘブ学習と自己組織化マップを利用している
  - 理論から導きだされる予測を本研究の手法を用いて確かめることができる
- ☆ 本研究の手法は多くの問題解決へのアプローチと異なる
- ▶ 本研究 = **physical interaction**
    - 複雑な認知系において認知は身体と相互作用していることを明確に仮定している
    - 認知の変化 ⇔ 行動の変化
  - ▶ 今までの研究 = **information based**
    - システムの情動的, 意味的な内容を原因として捉えていた
  - ▶ 2つのアプローチは互いに補い合えるはずである
    - 洞察問題解決など (Knöblich, Ohlsson, Haider, & Rhen- ius, 1999; see also Jones, 2003, and Ormerod, MacGregor, & Chronicle, 2002)
- ☆ 眼球運動から認知のダイナミクスにアクセスすることができる
- ☆ 本研究は自己組織化と認知科学の間の橋渡しとなる