

Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit

Lisa A. Haverty, Kenneth R. Koedinger, David Klahr, & Martha W. Alibali

Cognitive Science, 2000, Vol. 24 (2), 249-298

I. Introduction

◇ The Role of Inductive Reasoning in Problem Solving and Mathematics

- ▶ 帰納的推論 (inductive reasoning): 観察や事例の分析による一般的なルールの推論過程
 - 多くの問題解決状況で有効である
(Bisanz, Bisanz, & Korpan, 1994; Holland, Holyoak, Nisbett, & Thagard, 1986; Pellegrino & Glaser, 1982)

◇ Function-Finding Task Is Representative of Inductive Reasoning

- ▶ 目的: 帰納的推論の数学における役割を調べる
- ▶ 課題: function finding (関数発見; Figure 1, Figure 2)
 - 類似性と差異の検出と特徴づけが必要

x	1	2	3	4	5	6
y	1	4	9	16	25	36

Figure 1. Sample set of data for a function-finding problem.

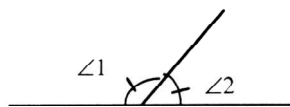


Figure 2. Given the measure of angle 1, find the measure of angle 2.

◇ Research on Function Finding

- ▶ 先行研究
 - 参加者は与えられたデータに対応する数式を発見する
- ▶ Huesmann & Cheng (1973)
 - 関数の階層的探索 (足し算, 引き算=簡単 → 割り算, 累乗=難しい)
- ▶ Gerwin & Newsted (1977)
 - “heuristic search”
 - 参加者は一般的なクラスの仮説を推論する
- ▶ Qin & Simon (1990)
 - 認知過程のより直接的, 詳細な分析
 - Huesmann & Cheng の結果の具体化 (簡単な関数から考慮される)
 - BACON モデル(Langley, Simon, Bradshaw, & Zytkow, 1987)
 - ・ 5つのヒューリスティックによる, 科学的発見のモデル
 - データを描写できるルールを見つける

- データにおける何らかの規則性を見つける
- データにおける何らかの線形関係を見つける
- もし 2 つのデータセットがともに増えるなら, 新しい数としてその比を生成する
- もし 2 つのデータセットの増減が逆の関係にあれば, 新しい数としてその積を生成する
- 反復メソッドにより関数発見
- ▶ 教育的目的のためには不適切なモデル
 - どれか一つをとっても複雑で難しい過程である
- ▶ 帰納的推論においてパターン発見とデータの収集は重要
 - パターン発見の過程は BACON のものより複雑
 - BACON ではデータの収集と組織化については考慮されていない
- ▶ 本研究では
 - データ収集とパターン発見過程の綿密な分析と特徴付け
 - それらの過程と仮説生成過程の間の関係の決定

II. METHOD

◇ Participants

- ▶ 18 名の学部生
 - 数学的経験は様々

◇ Materials

- ▶ 紙とペン, テープレコーダー, ラペルマイク, Hypercard

◇ Task

- ▶ 2 つの **function-finding** 問題 (F1, F2; Figure 4)
 - 各問題 10 のデータ事例を生成する機会を与えられる
- ▶ **interface** (Figure 3)
 - マウスのクリック回数で x の値 (左の四角) を指定
 - “DONE” ボタンで y の値 (Answer) を表示
- ▶ 1 間につき 25 分間で $f(x) = y$ の関数, 及び $f(1000)$ の値を見つける

◇ Procedure

- ▶ 言語化の練習
- ▶ 使い方と教示
- ▶ 最初の問題の開始

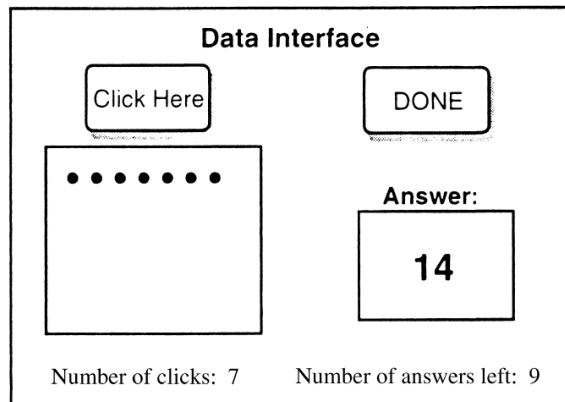


Figure 3. Example screen from data collection interface: collecting $f(7) = 14$.

	<u>X</u>	<u>Y</u>
Function 1 (F1)	3	0
$y = x(x-3)/2$	4	2
	5	5
$f(1000) = 498.500$	6	9
3 operations: -, *, ÷	7	14
Function 2 (F2)	<u>X</u>	<u>Y</u>
$y = x(2x + 1)$	1	3
	2	10
$f(1000) = 2.001.000$	3	21
3 operations: +, *, *	4	36
	5	55

Figure 4. Functions participants were asked to discover, with corresponding data.

- ▶ 使用済みの紙を回収して 2 問目
 - 25 分
 - 問題の順番はカウンターバランスがとられた
 - 課題中, 計算間違いは訂正された
- ▶ いくつかの数学教育に関する質問

◇ Coding of Protocols

- ▶ F1 における 15 名のプロトコルを分析
- ▶ 176 の細かいレベルのスキーマを用いてコーディング
- ▶ その後 16 の広いカテゴリーに分類
- ▶ 最終的に 3 つの主な活動のカテゴリーに分類される
 - Data Gathering
 - Pattern Finding
 - Hypothesis Generation

III. RESULTS

- ▶ 正答者数
 - F1 9/16 名
 - F2 15/16 名
 - ・ F1 のほうが難しい (割り算を含む; $p = .02$)

◇ Type of Activity Observed

- ▶ 3つの基本的な活動のタイプに分類
 - Data Gathering (DG): データの収集と組織化, 及びデータの表象化
 - Pattern Finding (PF): データの調査と分析
 - Hypothesis Generation (HG): 仮説の構築, 提案, 検証

✓ Data Gathering

Collecting

- ▶ 平均収集データ量 8.6 (5~10)
- ▶ x の値が小さい事例を収集する傾向にある
 - $x = 10$ 以上の時は 5 や 10 の倍数を収集する傾向があった
- ▶ 1人の例外を除いて決まった順番では収集しない
 - 15/16名の参加者は最終的に, 3から10の間の連続的なデータを収集した

Organization

- ▶ 全てのデータを表にまとめない
 - F1, F2において各1名しかグラフなどの表象を書こうとしなかった
- ▶ 未成功者のほうが少しだけ多いデータを集めた ($9.4 > 8$, $F(1, 14) = 4.74$, $p = .05$)
- ▶ 未成功者のほうが少しだけ長い表を書いた ($5.7 > 4.6$, $F(1, 14) = 1.09$, $p = .31$)
= 仮説の形成が進歩しないから
- ▶ 成功, 未成功に関わらずほぼ同じ情報を集めた

✓ Pattern Finding

- ▶ 新しい数の平均 3.4 (1~8; Table 4)
- ▶ 成功, 未成功者ともに用いられた過程は同じ
- ▶ 成功者は新しい数の生成後に分析を行う
 - “Pursuit (追求)” : 新しい数をさらに分析したり, 元からある y と同じように扱う

TABLE 4
Quantities Created by Participants on F1, In Order of Popularity

Quantity	x	y	y/x	y - x	x - 3	y diffs	y factors	y - x diffs	x diffs	y/x diffs
Data Values	3	0	0	-3	0	—	—	—	—	—
	4	2	1/2	-2	1	2	2: 2*1	1	1	1/2
	5	5	1	0	2	3	5: 5*1	2	1	1/2
	6	9	3/2	3	3	4	9: 3*3	3	1	1/2
	7	14	2	7	4	5	14: 7*2	4	1	1/2
Of 15 participants			8	7	5	5	4	3	3	2

Note. The abbreviation "diffs" refers to "differences".

✓ Hypothesis Generation

- ▶ 2つの仮説生成法
 - ① ローカルな x と y に当てはまる仮説を立てる (Table 5)
 - 他の事例へのあてはめを行う
 - 仮説と実際の結果の差を調べるにより、正しい関数を発見できる
 - ② 観察されたパターンを x を使って表す
- ▶ discrepancy analysis (Qin & Simon, 1990)
 - 仮説から予測される結果と、実際の y を比較する
 - 差を分析して x を用いて表し、解決を発見する

TABLE 5
Sample of Common Local Hypotheses for Single Instances

Instance	Local hypotheses
(3, 0)	$x - 3$
(4, 2)	$x/2, x - 2$
(7, 14)	$x + 7, 2x$
(8, 20)	$x + 12$
(9, 27)	$3x, x + 18$
(10, 35)	$3.5x, 3x + 5, x + 25$
(15, 90)	$x + 75, 6x$

◇ The Coordination of DG, PF, and HG

- ▶ 3つの活動の割合 (table 6)
- ▶ DG と PF が成功、未成功に関わらずある程度の割合を占めている
- ▶ DG は PF と HG のために行なわれる
- ▶ PF と HG のつながりはより複雑
 - HG は仮説の改訂のため PF の情報を必要とする
 - PF だけでは全体的な仮説が作れない
- ▶ 成功者は PF と HG に公平に effort を割り当てている (差の絶対値 $21.2 < 39.5, t(13) = 2.17, p < .05$)

TABLE 6
Proportion of Episodes Devoted to Each Activity

Type of activity	Mean proportion of episodes (SD)		
	All participants (15)	Unsuccessful (6)	Successful (9)
Data Gathering	.25 (.08)	.21 (.05)	.28 (.09)
Pattern Finding	.33 (.18)	.38 (.23)	.29 (.15)
Hypothesis Generation	.35 (.18)	.36 (.25)	.34 (.13)
Other	.09 (.04)	.06 (.06)	.09 (.04)
Mean number of episodes	113	129	102
Range	40-214	85-179	40-214

◇ Observed Path to Success

- ▶ 3つの異なる解経路

✓ Recursive Strategy

- ▶ 再帰的な y の式を変形していく
 - 例 F1)
 - 1つ前の y の値に, 該当する値 ($x - 2$) を足していく
 = 今までの y の差の合計
 = 2 ~ ($x - 2$) の合計
 = 正しい関数へ
- ▶ 特定の知識が必要

✓ Local Hypothesis Strategy

- ▶ 1つの事例にしか当てはまらない”local hypothesis” を用いる
- ▶ 例 F1)
 - すでに ”-3” が関係するというアイデアを持っている
 - $x = 7, y = 14$
 - $7 \cdot 3 = 4? \rightarrow 14 = 7 * 2 \rightarrow 2 = 4 / 2 \rightarrow x * (x - 3) / 2$
- ▶ 事前の local hypothesis が重要であった
- ▶ 一般的だが特定の知識が必要
 - そのような知識へのアクセスの迅速性がポイント

✓ Pursuit Strategy

- ▶ 最も一般的な方略
 - 問題をパターン認識可能な簡単な数 q に分解する
 - 数 q のパターンを求める
 - q を x を用いて表現する
 - 表現を組み合わせで一般的な式にする

- ▶ 仲介的な数(q)を取ることの利点
 - 問題の複雑さを減らし、パターン認識をしやすくする
 - ・ 2次関数を1次関数にすることができる

✓ **The Importance of Pursuit**

- ▶ Pursuit は 5 つの活動を含む
 - 数 q のパターンを見つける
 - Pursuit する価値のあるパターンかを決定
 - DG, PF, HG を用い, y にしたのと同様に調べる
 - q を x に関して表現する
 - q の代数的表現を完全な仮説に当てはめる
- ▶ Pursuit Strategy を用いて成功した参加者は全てのステップを行った
- ▶ 未成功者は Pursuit でどのように失敗したのか (table 8)?
 - 未成功者は各ポイントで Pursuit をあきらめ, q を x で表す時には 0 名に

TABLE 8
Comparison of Unsuccessful and Successful Pursuit on F1

Step achieved	Unsuccessful	Successful	Fisher's exact p -value
Computed q	4/6	6/9	.42
For at least 3 instances	3/4	6/6	.40
At regular intervals	2/4	6/6	.13
Detected q pattern	1/4	5/6	.11
Tried to express q in terms of x	0/4	5/6	.02
Solved the problem via Pursuit	NA	5	—

✓ **Puzzle Pieces and Expression in Terms of X**

- ▶ 未成功者は式のどの部分を作るのが難しかったのか (Table 9)?
 - $x - 3$ と x^* 以外の, それぞれの部分を見つけることができない
 - 未成功者はパターンを x で表すことが困難

TABLE 9
Acquisition of Puzzle Pieces

Puzzle piece	Unsuccessful	Successful	Fisher's exact p -value
$x - 3$	6/6	9/9	1.0
x^*	4/6	9/9	.14
$\div 2$	1/6	9/9	<.01
$(x - 3)/2$	1/6	9/9	<.01
$x/2$	2/6	9/9	.01
$x(x - 3)$	1/6	9/9	<.01

✓ **Summary of Successful Strategy**

- ▶ 3 つの成功方略に共通すること
 - x を用いて関係を表現するという目標と忍耐力

- 各方略は数学的背景知識, 特にパターン認識に依存する

◇ The PURSUIT Model

- ▶ Pursuit strategy をシミュレート
- ▶ ACT に基づくプロダクションシステムモデル”PURSUIT”
 - 数: 値のリスト
 - 仮説: 2つの数の関係式
 - はじめの数は x と y
 - ・ x : オリジナル”ソース”
 - ・ y : オリジナル”pursuit”
 - 手続き知識は **if-then** のプロダクションルールで記述
 - y 以外の数は **pursuit** に値するか調べられる
 - = 認識パターンを含むか
 - ・ 含まない → 前の **pursuit** に焦点を戻す

TABLE 10
PURSUIT Productions

Area of activity	Process	PURSUIT productions
Pattern Finding	Detect a pattern	Recognize-pattern, Examine-numerator
	Create a new quantity	Relate-by-addition, Relate-by-subtraction, Relate-by-multiplication, Find-differences-within-quantity
Hypothesis Generation	Express pattern in terms of x	Express-in-terms-of-X
	Construct hypothesis	Unwind-multiplication, Unwind-subtraction, Unwind-division
	Test hypothesis	Test-hypothesis, Finish

✓ Pattern Finding Productions

- ▶ Relate-by-addition, Relate-by-subtraction, Relate-by-multiplication
 - ソースと **pursuit** の数的関係を調べる
- ▶ Find-differences-within-quantity
 - 連続する y (数)の差を調べる
- ▶ Examine-numerator
 - 上半分(分子)を調べる
- ▶ Recognize-pattern
 - パターンのリストを提供する

✓ Hypothesis Generation Productions

- ▶ Express-in-terms-of-X
 - Pattern Finding の結果から数をソース(x)で表す

- ▶ Unwind-subtraction, Unwind-multiplication, Unwind-division
 - 最終的な pursuit(y)を生成するため逆算していく
- ▶ Test-hypothesis, Finish
 - 仮説をテストして、問題の解決を宣言

✓ Pursuit's Successful Performance on F1

- ▶ Table 11 解決までのプロダクション

TABLE 11
PURSUIT Productions for Succeeding at F1

Production	Action	New knowledge	Quantities	Compare to
1. Relate-by-multiplication	$S * _ = P$	$A = (0 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 2)$	$A = Y/X$	Ace's step 5.
2. Recognize-pattern: <i>differs-by-halves</i>		Pursue A		Ace's step 7.
3. Examine-numerator		$B = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4)$	$B = 2A = 2*Y/X$	
4. Recognize-pattern: <i>counting-numbers</i>		Pursue B		
5. Relate-by-subtraction	$S - _ = P$	$X - B = (3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3)$		
6. Express-in-terms-of-X	Hypo \Rightarrow P	$(X - 3) = B$		Ace's step 8.
7. Unwind-multiplication	Hypo/2	$(X - 3)/2 = A$	$B/2 = A$	Ace's step 9.
8. Unwind-division	(Hypo)*X	$X*((X - 3)/2) = Y$	$A*X = Y$	Ace's step 10.
9. Test-hypothesis		$X*((X - 3)/2) = Y$		
10. Finish		Problem F1: Status = solved.		

- step1 Relate-by-multiplication: ソース $X * A = \text{Pursuit } Y \rightarrow A = Y/X$
- step2 Recognize-pattern: A のパターンを見て Pursuit するに値するか決める
- パターン知識のレパートリーにマッチするパターンが含まれるか?
 - マッチ (*differ-by-halves*) \rightarrow Pursuit A
- step3 Examine-numerator: A に分母と同じ数をかける $\rightarrow B = 2A$
- 分子だけを調べられる
- step4 Recognize-pattern: マッチ (*counting-number*) \rightarrow Pursuit B
- step5 Relate-by-subtraction: B とソース x を引き算で結びつける $\rightarrow x - B = 3$
- step6 Express-in-terms-of-X: B を x で表す $\rightarrow x - 3 = B$
- step7 Unwind-multiplication: $B = 2A$ を逆算し, A を $B = x - 3$ で表す $\rightarrow A = (x - 3) / 2$
- step8 Unwind-division: $A = y/x$ を逆算し, y を x で表す $\rightarrow y = x * (x - 3) / 2$
- step9,10 Test-hypothesis, Finish: 仮説をテストして、解決を宣言する
- ▶ 未成功者はパターン認識 (step2) に失敗したため、数(A)が y より単純であることに気付かなかった

✓ PURSUIT Unsuccessful Performance on F1

- ▶ “*differ-by-halves*” パターンを、パターンマッチのリストから取り除く

- ▶ table 12 可能性のある解経路

TABLE 12
PURSUIT Productions for Failing at F1

Production	Action	New knowledge	Quantities	Compare to
1. Relate-by-multiplication Cannot fire "Recognize-pattern"	$S^* _ = P$	$A = (0 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 2)$	$A = Y/X$	Ace's step 5
2. Relate-by-subtraction Cannot fire "Recognize-pattern"	$S - _ = P$	$C = (-3 \ -2 \ 0 \ 3 \ 7)$	$C = Y - X$	
3. Find-differences-within-quantity		$D = (_ \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$	$D = Y \text{diff}$	Ace's step 2
4. Recognize-pattern: <i>counting-numbers</i>		Pursue D		
5. Relate-by-subtraction	$S - _ = P$	$X - D = (_ \ 2 \ 2 \ 2 \ 2)$		
6. Express-in-terms-of-X Cannot fire "Unwind" productions IMPASSE	Hypo = P	$(X - 2) = D$		Ace's step 3 Ace's step 5

- ▶ パターン認識されるのは Find-differences-within-quantity による $D = y \text{ diff}$ のみ
step5 Relate-by-subtraction $\rightarrow x - D = 2$
step6 Express-in-terms-of-X $\rightarrow x - 2 = D$
 - ▶ 再帰的な式しか作れないため、インパスに陥る
- $f(x) = (x - 2) + \text{the previous } y \text{ value}$
 - ▶ 実際に 6 名がこのインパスに陥った
 - ▶ 何を追及すべきか分かっているかが成功の分かれ目
- ✓ PURSUIT's Successful performance on F2
- ▶ F2 では 16 名中 13 名が Pursuit strategy を用いて発見
 - ▶ table 13 解決までの解経路

TABLE 13
PURSUIT Productions for Solving F2

Production	Action	New knowledge	Quantities
1. Relate-by-multiplication	$S^* _ = P$	$A = (3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11)$	$A = Y/X$
2. Recognize-pattern: <i>odd-numbers</i>		Pursue A	
3. Relate-by-addition	$S + _ = P$	$B = (2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$	$B = A - X = Y/X - X$
4. Recognize-pattern: <i>counting-numbers</i>		Pursue B	
5. Relate-by-addition	$S + _ = P$	$B - X = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$	
6. Express-in-terms-of-X	Hypo \Rightarrow P	$(X + 1) = B$	
7. Unwind-subtraction	Hypo + X	$X + (X + 1) = A$	$B + X = A$
8. Unwind-division	(Hypo)*X	$X*(2X + 1) = Y$	
9. Test-hypothesis		$X*(2X + 1) = Y$	
10. Finish		Problem F2: Status = solved.	

step2 *odd-numbers* テンプレート

step4 *counting numbers* テンプレート

- ▶ F1 と同様の経路だが, "differ-by-halves" パターンの使用のみ異なる

→F2 が解決できても, F1 が解決できない参加者がいる

✓ **Model Summary**

- ▶ 成功の違いを説明するのは, プロダクションの違いではなく, パターン認識の知識の違い
- ▶ モデルはパターン発見が帰納的推論において重要な役割を果たすことを示した

IV. DISCUSSION

◇ **Empirical Summary**

- ▶ 3つの活動
 - Data Gathering (DG), Pattern Finding (PF), Hypothesis Generation (HG)
- ▶ DG:
 - 過程は多様で, 構造化されていない
 - 成功, 未成功に関わらず同程度のスキル
- ▶ PF と HG:
 - 成功の違いはこの2つへの **effort** の割り当てによる
 - ・ 成功: PF と HG に公平に割り当て, 2つの活動を統合する
 - ・ 未成功: どちらかに大部分を割り当て, 2つの情報の統合がなされていない
- ▶ 3つの解経路
 - Local Hypothesis solution path, Recursive solution path, Pursuit solution path
- ▶ Local Hypothesis solution と Recursive solution path
 - 観察された結果を変換し, 最終仮説へ
- ▶ Pursuit solution path
 - パターンを見つけて一般化し, 組み合わせ, 最終仮説を構築
 - もっとも共通に用いられた方略
 - 帰納的推論に必要だと考えられる

◇ **Model Summary**

- ▶ PURSUIT モデル
- ▶ 複雑な問題を, 単純な問題のセットに分解する
 - x で表された式を組み合わせで仮説を構築する
- ▶ 帰納的推論の成功はパターン認識の知識に依存する
 - 成功者はより大きいパターンのレパートリーを持つ

= レパートリーに照合するパターンが含まれていると解決に成功できる

◇ Importance of Pattern Recognition

- ▶ 帰納的推論にはパターンのレパートリーの認識能力が重要
 - 不十分だと役に立つ数を見逃してしまう (Pursuit しない)
- ▶ 先行研究: エキスパートとノービスの違いはパターン認識に必要な領域知識 (e.g., Simon & Kotovsky, 1963; Chase & Simon, 1973; Koedinger & Anderson, 1990; Chi et al., 1982)
- ▶ 先行研究: 数学においては, 数字間の関係も含む数字の知識が必要 (Novick & Holyoak, 1991; Pellegrino & Glaser, 1982; Corsale & Gitomer, 1979; Holzman, 1979)
 - = パターンのレパートリー
- ▶ 数学における帰納的推論はパターン発見を必要とする
- ▶ パターン発見はアクセスの容易な数的関係の知識を必要とする

◇ Educational Implications and Future Work

- ▶ パターン検出の能力は **number sense** に含まれる
 - **number sense**: 数的関係の知識 (NCTM, 1991)
- ▶ **number sense** の向上
 - パターン発見スキルの向上
 - 上位の問題解決能力の向上
- ▶ **number fact** や数的関係の学習が上位の問題解決にも重要である

V. CONCLUSION

- ▶ データパターンの検出と象徴的な描写が帰納的推論の重要な役割を果たす
- ▶ パターン検出能力は数的知識とそのアクセススピードに直接的に関連する
- ▶ 数的知識は数学における帰納的推論の重要な要素である