

作問プロセスの経験的分類学

Constantinos Christou, Nicholas Mousoulides, Marios Pittalis, Demetra Pitta-Pantazi, Bharath Sriraman: An Empirical Taxonomy of Problem Posing Processes, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (International Reviews on Mathematical Education), vol.37, no.3, pp.149-158 (2005).

本稿は、作問の理論的モデルの構築・記述・テストに焦点を置く。モデル生成のために、問題解決・作問の研究においてしばしば記述されるプロセスを操作する。我々は、それらのプロセスを量的情報・意味・関係の「編集」、量的情報の「選択」、意味賦与や与えられた情報間の関係の作成による量的情報の「理解」と組織化、量的情報の「翻訳」と命名する。モデルの妥当性と応用性は、Cyprusの143名の6年生の生徒に対する5つの作問テストを使って、実験的に検証された。その分析から、生徒が3タイプに分類されることが判明した。カテゴリ1の生徒は、「理解」課題にのみ回答することができる。カテゴリ2の生徒は「理解」・「翻訳」課題の両方に、カテゴリ3の生徒はは全ての課題に回答することができる。また、生徒の結果から、最初に「理解」プロセス、続いて「翻訳」プロセス、最後に「編集」と「選択」プロセスを含む作問課題においてより成功した。

1 Introduction

- 作問
 - 実世界の現象の数学的理想化に必要なモデル化サイクルの一部
 - 科学における作問 [Mestre 2002]
 - 作問・問題解決が数学活動の中心
 - 数学教育における実践要求 [English 1997a; NCTM 2000; Silver,Cai 1996]
- 作問研究
 - 例 [Silver 1994; English 1998; English 2003]
 - プロセスの検討の必要性 [Brown,Waletr 1990]
 - nepistemology(negate-epistemology) [Root-Bernstein 2003]
 - :個人が未知なものを把握するため行う作問と評価
 - :革新的な個人教育への示唆のために要作問プロセス解明
- 本研究
 - モデル提案による生徒の作問プロセスの調査
 - 生徒の作問のプロセス理解の出発点の提供
 - :4つのプロセスの記述と検証
 - 考察と結論

2 Theoretical Considerations

- 作問研究の三大要素
 - 生徒の数学概念理解における作問
 - 生徒の作問プロセスと能力の発達の記述
 - 作問課題の分類

□作問と問題解決

- 作問の教育への導入
 - 作問の問題解決に対する効果 [Leung 1996; Silver 1994]
 - 生徒の数学概念理解とプロセスを得る機会 [English 1997a; English 2003]
 - 作問経験が課題認識・動機付けを拡張 [English 1998; Mestre 2002, Silver 1994; Winograd 1991]
 - 生徒の思考・問題解決技能・態度・後半な概念理解を改良 [English 1997a]
- 作問の利用
 - 問題解決の予測 [Kilpatrick 1987]
 - :作問と問題解決との間に正相関 [Cai 1998; Silver,Cai 1996]
 - 作問と数学一般の能力
 - :認知プロセス診断ツールとしての作問 [Mestre 2002]
- 要検討
 - 作問プロセスと作問分析・評価スキーマ

□作問能力とプロセス

- English の調査 [English 1997a,1997b,1998]
 - 一部のタイプの作問のみ (3年生) [English 1998]
 - 作問プログラム参加者は非参加者よりよい作問 (5年生と7年生) [English 1997a,1997b]
- Silver の調査 [Silver,Cai 1996]
 - 問題文からの質問生成
 - 作問の分類
 - :解決可能, 言語的複雑さ, 数学的複雑さ
 - 適切で複雑な作問が可能
 - 関連付けプロセス
 - 例: 作問1題目と2・3題目に関連あり, 簡単な作問から複雑な作問へ (生徒の思考プロセスの分析はなし)

□作問課題の分類

- Stoyanova の3カテゴリ [Stoyanova 1998]
 - (a) 自由状況: 制限なし
 - 例: [Lowrie 1999], 数学オリンピック
 - (b) 半構造化状況: 問題・絵・図などが与えられる
 - (c) 構造化状況: 解決済みの問題の変形, 与えられた問題の条件変更
- Silver の分類 [Silver 1995]
 - (a) 問題解決前: 物語・絵等の刺激からの作問
 - (b) 問題解決中: 目標・条件の変更, 「簡易化」など
 - (c) 問題解決後: 問題解決経験を新しい文脈に適用
 - 作問は問題解決と密接に関係
- Stoyanova と Silver のかけあわせ5カテゴリ
 - (a) 一般の作問 (自由状況)
 - (b) 与えられた答えを持つ作問
 - (c) 特定の情報を含む作問
 - (d) 問題状況からの作問
 - (e) 与えられた計算に合う作問
- 分類とプロセス理解
 - 色々
 - 広範な課題のためのフレームワークが必要
 - 本研究の提案モデル
 - :先行研究のアイデアを統合
 - :問題領域は2ステップの足し算・引き算作問のプロセス
 - :汎用的・多様な問題に適用可能

3 The Posed Model

- 作問における思考プロセス
 - 教育に望ましいアプローチの提供
- 提案モデル
 - 若い生徒の思考を4つのプロセスで記述
 - 問題解決にも多分相当プロセス
 - 簡易化のため各プロセスと1課題形式を関連付け
 - 「編集」: 制限のない作問 [Mamona-Downs 1993]
 - 「選択」: 与えられた解に合う作問
 - :制限あり, 要文脈・関係理解のため「編集」より難しい [English 1998]
 - 「理解」と組織化: 与えられた数式・計算に合う作問
 - :要操作の意味理解, 生徒は意味構造に注目しない [English 1998; Silver,Cai 1996]
 - 「翻訳」: 与えられた図表からの作問
 - :要数学的關係とは異なる表現の理解

- 本研究の課題形式：半構造化／構造化
 - 与えられた刺激からの作問
 - : 図・記号形式の量的情報
 - 課題の例 (→ Table 1)
- 本研究の目的
 1. 提案モデルの検証
 - : 作問が提案した認知プロセスを含むか
 2. 生徒の作問能力の発展傾向の探索＋生徒のプロセスの違い

4 Methodology

- 被験者
 - Cyprus の都市の小学校 6 クラスの 6 年生 143 名 (男子 79 名・女子 64 名)
 - 全員作問経験なし

□方法

- 課題
 - 作問テスト 5 題
 1. 答えに合うように欠けた質問を完成・4 問
 2. 与えられた方程式に合う作問・3 問
 3. 数学情報を含む絵から指定された操作を持つ作問・3 問
 - : 2 つの足し算と 1 つの引き算で解く問題
 4. テスト 3 の表バージョン・3 問
 5. 物語からの作問・2 問
 - : 毎日の TV シリーズと Columbus のアメリカ発見
 - 問題と解法を要求
 - 数学の授業内で各テスト 20 分
 - 実験前 10 日間・研究者の一人が約 40 分生徒と作問
- 量的デザインの目的
 1. 質的研究より一般化が容易
 2. 質的研究で使われる新語の応用性は不確か
 3. 目的が質的研究の補完
 4. 質的研究を経験的に検証する試み

□データ分析

- 目的
 - 1. 提案モデルの評価と 2. 生徒の作問能力の発展傾向の追跡
- モデルの評価
 - *a priori* なモデルとデータの適合
 - 検証的因子分析
 - : 観測変数が潜在変数を定義する測定モデルの検証に使用
 - 計算する指標
 1. χ^2 と自由度の割合 (χ^2/df)・最大 2
 2. 比較適合度指標 (CFI)・0.9 以上
 3. 近似値の誤差の平方和の平方根 (RMSEA)・0.08 以下

□ *a priori* な一般構造モデルの検証

- モデルとデータの適合
 - 1 次因子：4 つの認知プロセス
 - (F1)「理解」, (F2)「翻訳」, (F3)「編集」, (F4)「選択」
 - : 「理解」・「編集」・「選択」は各相当テストで、「翻訳」は 4 テストで
 - 2 次因子：作問能力
 - : F1～F4 により構築
- プロセス間の発展傾向の分析
 - 潜在プロファイル分析 (個人中心の分析方略)
 - 作問課題の取り組み方のパターンを記述

5 Result

- 主結果
 - 潜在因子の妥当性
 - 作問プロセスの観点からのカテゴリ

□モデルの妥当性

- モデルの潜在因子 (→ Figure 1)
 - 適合指標は過程された 1 次・2 次因子を支持 (CFI=0.950, $\chi^2/df=1.25$, RMSEA=0.05)
 - パラメータの評価は正当
 - :全因子負荷量・ r^2 が統計的に有意
 - :各課題は相当する認知プロセスと関係
- 作問能力の予測
 - 4 つの認知プロセス間に違い
 - F3: 「編集」・F4: 「選択」が主 ($r^2=.90$ と $r^2=.92$)
 - F1: 「理解」・F2 「翻訳」は緩やかな効果 ($r^2=.45$ と $r^2=.47$)

□生徒と発展傾向のカテゴリ

- 本課題における被験者の相違
 - mixture growth modeling[Muthen,Muthen 2004] を使用
 - :被験者のカテゴリの仮定を 2・3・4 と変えて検証
 - カテゴリ数 3 が最良, 各カテゴリは明確に分離 (→ Table 2)

Table 2: 潜在クラス確率の平均

メンバー	潜在クラス 1	潜在クラス 2	潜在クラス 3
カテゴリ 1	0.94	0.06	0.00
カテゴリ 2	0.03	0.95	0.01
カテゴリ 3	0.00	0.03	0.97

- 各カテゴリの認知プロセスの平均と SD (→ Table 3)
 - :カテゴリ 3 > カテゴリ 2 > カテゴリ 1

Table 3: 各認知プロセスにおける 3 カテゴリの生徒の平均と SD

	「理解」	「翻訳」	「編集」	「選択」
カテゴリ 1				
平均	0.75	0.18	0.46	0.43
SD	0.32	0.22	0.36	0.37
カテゴリ 2				
平均	0.87	0.79	0.66	0.63
SD	0.23	0.20	0.25	0.29
カテゴリ 3				
平均	0.97	0.97	0.96	0.99
SD	0.11	0.07	0.10	0.04

- カテゴリ 1 の生徒の作問
 - : 「翻訳」・「編集」・「選択」課題では 50%以下
 - : 「理解」課題には成功 ($\bar{X} = .75$)
 - 式からの作問, Cyprus では教科書に載っている
 - 学校の経験・教科書に乗っている問題を作問しがち [English 1998; Lowrie 2002]
- カテゴリ 2 の生徒
 - : 「編集」・「選択」課題がやや低い
 - 統語・意味的に正しい問題生成が必要で大変 [Silver,Cai 1996]
- カテゴリ 3 の生徒
 - :全課題に成功
- 発展傾向
 - 生徒が解決できた問題から導出 (→ Table 4)

Table 4: 各カテゴリの生徒の 67%以上が解決できた問題

	「理解」	「翻訳」	「編集」	「選択」
カテゴリ 1	■			
カテゴリ 2	■	■		
カテゴリ 3	■	■	■	■

- 発展の順序
:最初に「理解」, 次に「翻訳」, 最後に「選択」と「編集」
:パス解析 (→ Figure 2)

6 Discussion, Conclusion and Implications

- 現在の作問の議論
 - 複雑, 知識ベース・方略・動機・メタ認知の成長に伴う (?)
 - 作問の発達を説明するモデルなし
→ 本研究の目標
- モデルの構築と検証
 - 生徒の作問における思考の理解
 - 先行研究の能力と課題を統合
 - 一応 Open-ended な課題を使用
:制約に合う範囲内で自由な作問
 - データとの適合から 4 つのプロセス
:「選択」・「編集」・「理解」・「翻訳」, 作問能力を仲介
- 課題による生徒の多様性の拡張
 - 生徒を異なる 3 カテゴリに分類
 - カテゴリ 1 の生徒は「理解」課題のみ → 伝統的な作問がこれ
 - カテゴリ 2 の生徒は図表からの作問もできる
 - 「編集」・「選択」課題で必要となる理解
 - (1) 「編集」: 物語からの情報抽出
 - (2) 「選択」: 物語における数学的関係の認識
 - 「できる生徒の数学的思考」の質的研究と一致 [Sriraman 2002,2003]
- 教育への示唆
 - 4 つの認知プロセスの発達段階
 - 「理解」から開始
: 教室での教示法の影響?
 - 「編集」「選択」は大変なので注意が必要
- 研究への示唆
 - 作問の認知プロセス検討のプロトタイプ
- その他
 - 生徒の作問評価のために
 - 作問は生徒の興味と関係 [English 2005]
 - 教師が作問の良し悪しを見分ける要素を
→ 生徒の作問に対する不安を軽減

Table 1: 各プロセスに相当する課題

□ 「選択」

問題の答えが「385本の鉛筆」になるように、下の物語の質問を書きなさい。

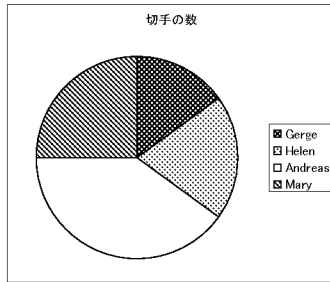
「Alexは180本、ChrisはAlexより25本多くの鉛筆を持っています」

問題の答えが「75ポンド」になるように、下の物語の質問を書きなさい。

「Jasonは150ポンド持っています。お母さんがいくらかくれました。25ポンドの本を買ったら、残りは200ポンドでした。」

□ 「翻訳」

解法に1つの足し算と1つの引き算が必要となるように、下の図に基づいて問題を書きなさい。



解法に1つの足し算と1つの引き算が必要となるように、下の表に基づいて問題を書きなさい。

子供	貯金
John	340
Helen	120
Joanne	220
Andrews	110
Gerge	280

□ 「理解」

下に合う問題を書きなさい。

$$(2300 + 1100) - 790 = n$$

$$5100 - (2400 + 780) = n$$

□ 「編集」

下の物語に基づいて問題を書きなさい。

「A.D.1492年、Columbusはインドへの長い航海に出発した。最初の船Santa Mariaには、250kgの肉、600kgの小麦粉、1200kgのジャガイモを積んだ。不運にも事故で、245kgのジャガイモがダメになった。2番目の船では、Santa Mariaより300kg多い肉を積んだ。Columbusは偉大な歴史的発見を遂げた。アメリカを発見した！」

下の絵に基づいて問題を書きなさい。



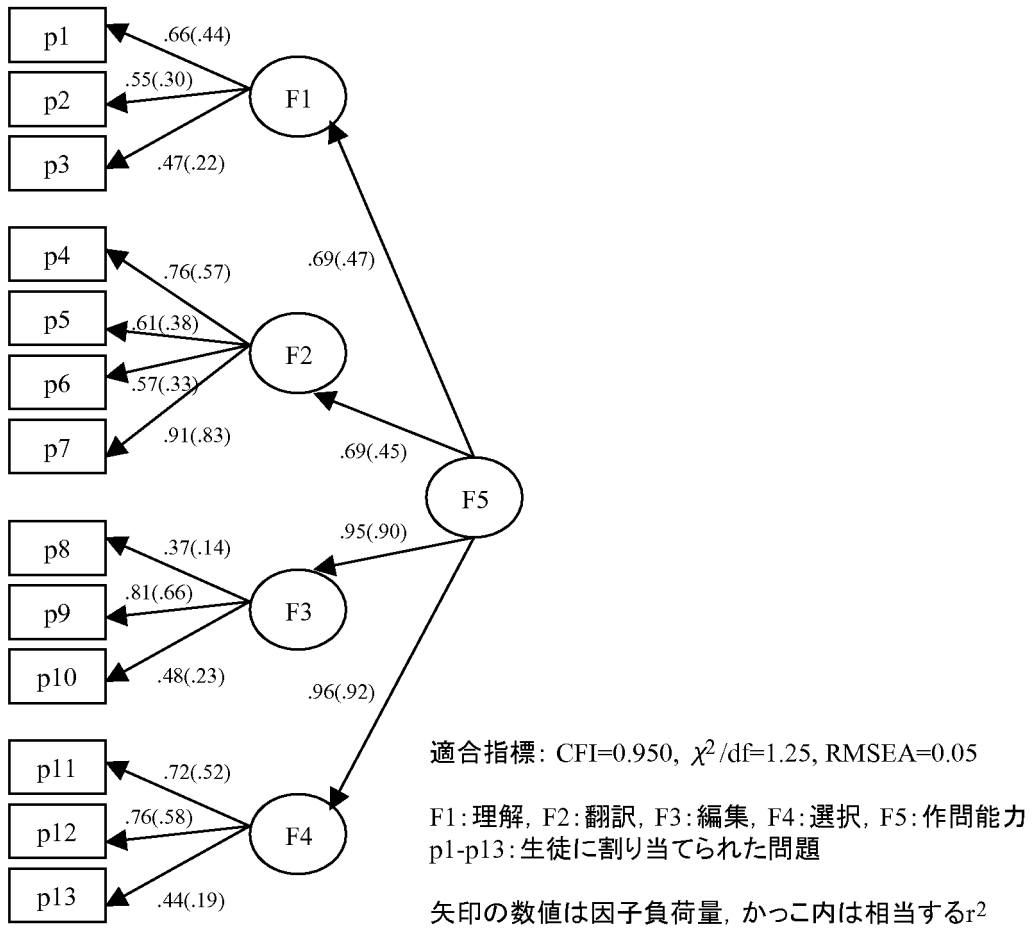
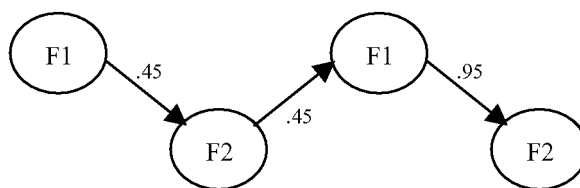


Figure 1: 作問プロセスモデル



適合指標: CFI=0.952, $\chi^2/df=1.36$, RMSEA=0.05

F1: 理解, F2: 翻訳, F3: 編集, F4: 選択

Figure 2: 作問プロセスの発展傾向のパス解析系列