

A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments

Mitchell J. Nathan, Walter Kintsch: A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments, Cognition and Instruction, Vol.9, No.4, pp.329-389 (1992).

(ABSTRACT?)

談話処理 (discourse processing) [van Dijk and Kintsch 1983; Kintsch 1988] に基づく問題理解モデル

- 命題・状況の収集と推論 + 既知の問題モデル 数学的処理 解の導出
- 読解指向なタスクとして議論：テキスト理解・長期記憶引き出しの能力欠如
 - 読解に問題 解法の見落とし, 数学的制約の選択ミス
 - 代数表現は意味を排除 変換ミス・誤解

ANIMATE における学習実験

- 領域知識・生徒の行動監視等, 一切持たない
- アニメーションを通して状況の意味を数式に与える

問題理解・状況との関連づけが促進

1 (INTRODUCTION?)

「問題理解に対する心理学的要求の知見は, 生徒への教示における要件, および計算機ベースのチュータの持つべき機能の要件を与えてくれるかもしれない」

談話処理 (discourse processing) [Dijk and Kintsch 1983; Kintsch 1988] に基づく問題理解モデル

- 文章題における生徒の誤り
 - 読解からの心的表象構築の失敗
 - 問題文の状況と数式表現の関連づけの失敗
- 文章題の難しさ [Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, Reys 1980; Cummins, Kintsch, Reusser, Weimer 1988; Kintsch, Greeno 1985; Lewis, Mayer 1987; Resnick 1988]
- 代数操作ではなく状況の推論が致命的 [Hall, Kibler, Wenger, Truxaw 1989]
- 著者の主張
「問題理解には, 生徒は数式と問題文に記述された状況の理解を一致させる必要がある」
- チュータリングシステム ANIMATE [Nathan, Johl, Kintsch, Lewis 1989; Nathan, Young 1990]
 - アニメーションによる状況と数式の関連づけ
 - 理解支援と問題解決能力の向上

以降,

- 先行研究に見られる文章題理解
- ANIMATE の概要 (理論と機能)
- ANIMATE による学習実験

2 A PSYCHOLOGICAL MODEL OF WORD-PROBLEM SOLVING AND COMPREHENSION

算数の文章題理解 [Kintsch, Greeno 1985; Reusser 1988; Cummins et al. 1988]

- 談話処理モデル [van Dijk and Kintsch 1983; Kintsch 1988]
 - テキストベース：読解から作成される命題表現
 - 状況モデル：テキストにおける行動の表現

- 生成規則モデルによるシミュレーション [Kintsh,Greeno 1985]
 - テキストベース・状況モデルの生成, 問題解決方略の選択
 - タスク固有の問題スキーマ: オブジェクト (ex. ビー玉) をどうする (ex. フレッドはジョーに渡した) - 生徒の問題解決の誤りを最も表したのは「言語処理の誤り」 [Cummins et al. 1988]
- 文章題の理解・解決の処理: 相互抑制 3 水準
 - (a) テキスト入力 of 表現 - テキストベース (textbase)
 - (b) 日常的な経験からテキストを状況に変換 - 状況モデル (situation model)
 - (c) 状況の形式化 - 問題モデル (problem model)

2.1 Generating a Propositional Representation and a Situation Model

問 1) 距離-速度-時間の文章題

最初の飛行機がデンバーから東に 1 時間 200 マイルの速さで出発します。3 時間後、2 番目の飛行機が並行するコースで、デンバーから東に 1 時間 250 マイルの速さで出発します。2 番目の飛行機が最初の飛行機を追い抜くのに何時間かかるでしょう。

- 問 1 の命題リスト [van Dijk and Kintsh 1983]
 - 命題 1 出発する [飛行機 1, デンバー, 時間 1]
 - 命題 2 速度 [命題 1, 毎時 200 マイル]
 - 命題 3 方角 [命題 1, 東]
 - 命題 4 後 [命題 1, 命題 5, 3 時間]
 - 命題 5 出発する [飛行機 2, デンバー]
 - 命題 6 方角 [命題 5, 東]
 - 命題 7 位置 [命題 5, 命題 8]
 - 命題 8 並行 [コース]
 - 命題 9 速度 [命題 5, 毎時 250 マイル]
 - 命題 10 何時間 [命題 11]
 - 命題 11 追い抜く [飛行機 2, 飛行機 1] (top-level)
- 相当する状況モデル (個人間で異なるかも)
 - 並行する 2 機の飛行機, 2 番目の飛行機が 1 番目を追い抜く瞬間 ... の表現
 - 「追い抜く」に関する情報がない 状況モデルから「出発点から同じ距離にある」 [van Dijk and Kintsh 1983; Weaver, Kintsh 1987]
 - 解法に必要な量的記述によらず, 質的に関係することがらを表現する傾向 [Nathan 1988]
 - ⇒ 物語の理解と同様

2.2 Cenerating a Problem Model

状況モデルから数学的記述の構成

1. 命題 2, 命題リストから時間と距離を特定, 飛行機 1 の距離-速度-時間スキーマ (Figure1)
2. R スロットに命題 2, 命題 1・命題 3 は問題状況特定に使用
3. 命題 9 から飛行機 2 の距離-速度-時間スキーマ初期化, 命題 5~命題 8 を割り当て
4. 命題 4 は支持関係 (supporting relation), 2 つのスキーマを関係づける (遅延情報)
 - 問題文・テキストベースに出現しない, 知識や状況理解から導出 [Singley et al. 1989]
 - 「予測 1a」
推論の付随的な認知要求のため, 必要と感じた時のみ読解者は推論を行う。貧弱な問題解決者はこの推論を見落としてしまう傾向があり, 解法から関連づけする方程式 (支持関係) を見落としてしまうだろう。状況的に推論する問題解決者は, こうした推論に基づく方程式を含む傾向があるだろう。
 - 「予測 1b」
後からカバーストーリーに適切な状況モデルを作成し, この表現を数学的理解に結びつけることを学んだ初期の貧弱な問題解決者は解決のプロトコルで支持関係の誤指定が減少することを示すだろう。
5. 命題 10 は飛行機 2 の時間, スキーマの T スロットに割り当て
6. 命題 11 から追いつく点に関する推論 支持関係

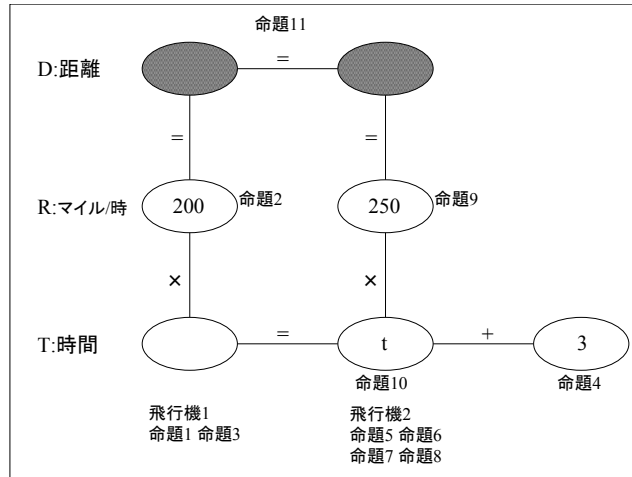


Figure1: ネットワーク表現による問1の問題モデル

- 「テキストベース・状況モデルからの推論」から「スキーマの構築・instantiation」
- 命題から計算可能な代数式を組織
- 代数表現とは命題・推論と一致

方程式	命題	推論 / 支持関係
$D1=200 \times T1$	1,2,3	-
$D2=250 \times T2$	5,6,9	-
$T1=T2+3$	1,4	「後」は「+3」、飛行機2は1より遅れて出発するから
$D1=D2$	5,6,7,11	「追い越す」は「=」、2機が同じ距離を飛ぶ瞬間がある
$T2 = ?$	10	-

(日常的) 状況理解と(代数スキーマ)問題構造理解

- 支援が必要なのは問題モデル表現，日常的な状況はよく知っている
- 状況に基づく理解には問題文からの暗黙的な特徴抽出が必要
- 最初に「形式主義」が役に立つ理由 [Nathan 1988]
- 相互に支援「状況が問題モデルの意味付けに」「問題スキーマが状況モデル作成に」
「予測2」
与えられたカバーストーリにおけるキャラクタ・イベント・関係を量的な解法に必要な形式的な記号と表現の知識と関係づけることにより数学的にストーリー状況を解釈するよう励まされた生徒は，文章題の解を導き出せる方程式の生成において，ストーリーのフレーズと方程式のマッピングを行う直接的な変換に基づくアプローチを使う対照者より有意になるであろう。
「予測3」
与えられたカバーストーリにおけるキャラクタ・イベント・関係の知識に形式的な記号と表現を関係づけることにより代数式を状況的に解釈するよう励まされた生徒は，代数式の状況的な記述の生成において，ストーリーのフレーズと方程式のマッピングを行う直接的な変換に基づくアプローチを使う対照者より有意になるであろう。
「予測4」
状況的に推論を行う問題解決者は，フレーズ志向の対照者より，カバーストーリを伴うかもしれない状況的な方程式の組の適切さ，あるいは不適切さを認識する能力をつけるだろう。
: 「予測4a」
そうした生徒はフレーズ志向の対照者より，指示する状況と数学的記述をマッチングさせることにおいて，与えられた状況と矛盾する数学的記述を検出することにおいて良くなるだろう。
: 「予測4b」
そうした生徒はより不適当に指定された形式上の表現を修正する能力を持ち，正しく意図する状況を記述するだろう。

2.3 Generating an Equation

方程式の生成

- スロット (Figure1 中の楕円) を変数により問題記述に引用
- 問 1: 飛行機 2 に必要な時間の問い
 - 命題 4: $t+3$
 - 「 $D=R \times T$ 」スキーマ
 - 命題 11: $200 \times (t+3)=250 \times t$

2.4 Algebraic Problem Schemas

8 種の文章題カテゴリ [Mayer 1981]

- 割合 (rate) を含む 4 種: 整数・幾何・力学・統計
 - 割合スキーマ: $\text{UNIT1} = \text{UNIT1}$ の割合/単位 UNIT2 毎 $\times \text{UNIT2}$
 - 整数問題には特定のスキーマがない (例外: 偶数は $2N$)
 - 幾何・力学では法則・定理・公理がスキーマに相当

割合	ユニット 1	ユニット 2
量/時間	量	時間
コスト/単位	コスト	単位
合計に対する部分	部分	合計
量に対する量	量	量

- (Figure1 のような) スキーマ表現の使用
 - 汎用的, 生徒の理解と概念化を支援
 - 学習にはさらに推論・知識の適用が必要となる余地あり

3 THEORY OF LEARNING: MAKING FORMALISMS SITUATIONALLY MEANINGFUL

文章題の問題理解は困難

- 文章題はテキスト処理・数学記述の練習
 - 教師は問題理解より数式操作の発達を重視 [Mayer 1985; Willis, Fuson 1988]
 - 形式操作, 問題文中キーワードと代数表現のマッピングは学習される
 - 原理は学習されない, 式を記述された状況の数学モデルとして見ない [Greeno 1989]
 - 盲目的に変換するだけの生徒 (負数のお金等, 現実不可能でも) [Paige, Simon 1966]
 - 力学 [Caramazza, McCloskey, Green 1981; Larkin 1983], 幾何学 [Schoenfeld 1987], プログラミング [Pennington 1987] で同傾向の報告
 - 状況から形式表現を分離 [Wertheimer 1945; 1982]
- [Greeno 1989]
 - 記号空間表現 (方程式など) と変換
 - 実世界・状況空間表現
 - 生徒は実世界のイベントと関連づける推論の学習をせず, 記号表現を手続き的に解く学習をする
- イベントのアニメーション提示による支援
 - LOGO [Harel 1990; Papert 1980]
- 文章題におけるモデルに基づく推論の観察 [Hall et al. 1989]
 - 問題の状況的・量的の二重表現の統合が重要
 - 図的スキーマの使用

4 A STRATEGY FOR TUTOR DESIGN: DISCOURSE COMPREHENSION THEORY AND INSTRUCTIONAL PRINCIPLES

- (a) 生徒の文章題の理解・解決の理論
- (b) 教示原理

4.1 The Theory of Word-Problem Understanding: What to Tutor

ANIMATE [Kintsh,Greeno 1985; Reusser 1988; Cummins et al. 1988; Kintch 1988]

- 算数の文章題シミュレーション 代数のチュータ ([Anderson,Boyle,Yost 1985] に従って)
- 「教えること」と、その「教え方」
 - 生徒の形式・状況に関係する心的表象
 - 問題文から形式・概念構造に変換する学習の支援
- 熟達者（初学者が学ぶべきもの）
 - 熟練者は変換が直接的・推論が自動的
 - 世界を問題モデルを通してフィルタリング
生徒には直接明示してやる必要がある

4.2 Instructional Principles: How to Tutor

認知科学的実験からの原理 [Anderson,Boyle,Farrell,Reiser 1984]

- 問題解決における生徒の作業記憶の最小化
[Polson,Richardson 1988; Scardamalia,Bereiter,McLean,Swallow,Woodruff 1989]
- 目標をはっきりさせる, 解法の概算 [Glaser,Bassok 1989]
- 最低な改善のための直接的フィードバック
[Anderson et al. 1984; Anderson,Conrad,Corbett 1989; Reiser,Kimberg,Lovett,Ranney 1989]
- 「エラーはチュータリングの介入のほぼ必要十分条件になる」

形態

- 両構造問題（代数操作・初頭プログラミング・幾何など）では直接フィードバックは有効
- 無制限な領域（生命科学・文章題理解など）ではもうひとつ
 - 生徒の行動の把握が必要, 自然言語理解は不完全
 - アニメーション・簿記・形式記述処理（方程式など）, 自然言語処理と推論は生徒に
- 数学のワークシート・アニメーションの提示
 - 生徒は問題文を読み, 問題モデルを構築
 - システムは正否についてアニメーションでフィードバック
 - スキーマ・状況に関する問題情報の組織化を支援
- システムは生徒の活発な参加を励ます必要がある [Scardamalia et al. 1989]
 - 計画, 自己評価・モニタリング, 問題に関係する推論, 目標設定, 知識の組織化, 問題解決など
- 「手続きの簡便化」 [Papert 1980]
 - 生徒自信が診断・目標設定・学習を最大化, システムはツールの提供
 - 弱点 [Scardamalia et al. 1989]
 - (a) 「学ぶこと」の学習
 - (b) 認知的な目標設定
 - (c) 問題理解の簡易化
 - (d) 自己モニタリング・知識の組織化の発達

5 THE ANIMATE LEARNING ENVIRONMENT

文章題理解のチュータ

- 問題のネットワーク表現構築支援，アニメーション提示
- モデルに基づく解法 [Hall et al. 1989] 構築の支援

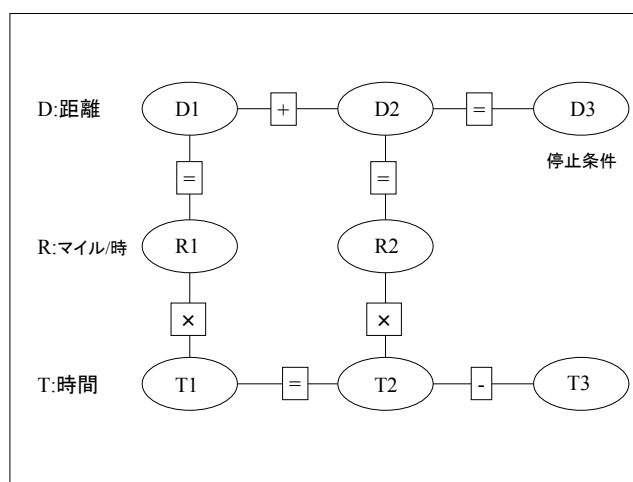
アニメーション

- 問題状況の理解に対する表現形式
 - 数学的思考方の状況的表現・数学形式によるイベント解釈
- 通常の記事題解決のモデル・対応するチュータの機能 (Figure2)
 1. 生徒に明確な問題モデルの図的表現構築を要求
 2. アニメーションによる代数領域の形式と実世界の状況のリンクの提示
問題理解により誤りや見落としが減少
- アニメーションの振る舞いを観察
 - 予期せぬ振る舞い 代数ネットワークを修正
- 類似するシステム
 - Envisionment Machine [Roschelle 1987]: 物理学的状況・スキーマ表現
 - TRIP チュータ [Gould,Finzer 1982]: アニメーションを使った方程式構築支援
ANIMATE は誤った式の入力からもアニメーションを提示
- 構成
 - HyperCard, 要 Macintosh Plus 以上 (1986 年製・68k 8MHz にメモリ 128kB)
 - 量/時間の文章題用 ($D=RT$ による「追い越す」「衝突する」「どれだけ離れる」問題)
 - ユーザに対し特に教示を必要としないデザインを志向

問 2) 衝突の文章題

巨大なアリがサンフランシスコを襲おうと、2400 マイル離れたデトロイトに向かって東に毎時 400 マイルで飛び立ちました。1 時間後、これを知った軍隊はアリを防ぐため、デトロイトからヘリコプターを毎時 600 マイルで送りました。アリが午後 2 時に飛び立ったとしたら、ヘリコプターとアリが遭遇するのは何時でしょう。

- キャラクタの選択
- キャラクタの出発位置を選択 (Figure3)
- 問題スキーマ作成による動きの指定 (Figure4)



ラベルなし図: 問 2 の例で選択されたスキーマ (ちなみに $T1=T2-T3$ が間違い)

- スロットに数値の入力 (Figure5)

- スキーマの記述エラーをチェック，誤りが報告される（ Figure6）
- 誤りを無視してアニメーション実行，ヘリコプターが最初に動いてしまうことに気付く（ Figure7）
- 修正後（ Figure8），アニメーションは心的イメージと合致

6 PRELIMINARY EMPIRICAL SYSTEM EVALUATION

6.1 Method

被験者

- コロラド大学の学部生 56 名
 - 高校レベルの代数能力あり，与えられた問題は既知
- 心理学コースの導入として 2 時間の実験参加

デザインと材料

- 事前テスト，練習課題 3 題を含む練習セッション，事後テスト
 - テストは教室授業風に，グループの 14 人全員が一度に実施
- 条件：4（処遇・被験者間）× 3（問題種・被験者内）× 2（テストの時間・被験者間）
 - 4 の処遇 = チュータの使用機能 3 種（ Table1）+ 教室授業
 - テストは距離-速度-時間問題 4 題：問題文 方程式導出 + 方程式 問題文作成（予測 4 がらみ）
 - 練習：適切な解法の選択・問題のデバッグ（予測 4a がらみ）

チュータ	Table1 使用するチュータの機能		
	ネットワーク表現あり	問題条件組み立てあり	アニメーション実行あり
ANIMATE 1.0	Yes	Yes	Yes
停止条件	Yes	Yes	
ネットワークのみ	Yes		

グループ練習

- 被験者は $D=RT$ の方程式の基本説明セッションに参加
 - 方程式グループ（教室授業？）には厳密な代数の式導出の説明，中間的なツール無し
 - チュータグループは Figure1 の図的表現を教示

手続き

1. 事前テスト
 - 解法 2 題・デバッグ 1 題・ストーリー 1 題
2. 代数（統制群）の説明 / ネットワーク手法のチュートリアル 30 分
3. 練習課題 3 題の解決
 - ANIMATE の使用：完全 / 停止条件 / ネットワークのみ
4. 事後テスト（計算機は使用しない）
 - 事前・事後テストは比較可能？ $F(1,31) < 1$

6.2 Result

成績

- 事前・事後テスト：解決 2 題 + デバッグ 1 題 + ストーリー 1 題 = 4 点満点
- 練習課題：デバッグ 1 題 + 解決 1 題 + 選択 1 題 = 3 点満点
 - ストーリー作成は方程式が完全に記述されるとき 1 点
 - 選択問題は 0/1 点
 - その他の問題は部分点あり，途中の式まで完全に満たされて 1 点

誤りの分析

- 処遇（どう学習させたか）のパフォーマンスに対する効果
- 誤りの分類（2 × 2）
 - 欠落：必要な関係（T1=T2 など）が不足
 - 形式の指定：問題文の状況と一致しない関係が出現
- ×
 - (a) 方程式管理：例えば（？）DRT の誤り
 - (b) 推論に基づく指示関係
- 誤りの出現頻度（事前テスト：Table2・事後テスト：Table3）
 - デバッグ問題については除外（問題の形式上，出現しない誤りがあるため）

Table2 事前テストの DRT（距離-速度-時間スキーマ）・支持関係の誤り頻度（デバッグ問題は除外）

誤りタイプ	群				計
	アニメーション	統制	ネットワーク	停止条件	
DRT					
形式	20	11	10	17	58
欠落	7	11	3	7	28
計	27	22	13	24	86
指示関係					
形式	18	14	24	17	73
欠落	13	14	14	19	60
計	31	28	38	36	133
小計	58	50	51	60	219
その他	10	2	5	0	17
計	68	52	56	60	236

- 事前テストの誤り：DRT 39%・支持関係 61% 予測 1
- 条件間で差はなし

Table3 事後テストの DRT・支持関係の誤り頻度（デバッグ問題は除外）

誤りタイプ	群				計
	アニメーション	統制	ネットワーク	停止条件	
DRT					
形式	0	5	7	2	14
欠落	1	5	6	10	22
計	1	10	13	12	36
指示関係					
形式	12	19	20	10	61
欠落	5	26	23	14	68
計	17	45	43	24	129
小計	18	55	56	36	165
その他	1	0	1	1	3
計	19	55	57	37	168

- 事前～事後で DRT が減少：訓練の効果
- 統制・ネットワーク・停止条件で DRT に差なし：方程式パレットの効果なし？（Figure4）
- 状況に基づくチュウタ使用群（アニメーション・停止条件）は支持関係の欠落が少ない 予測 1a
アニメーション群は特に少ない 予測 1b
- 統制・ネットワークは支持関係の欠落増加停止条件・アニメーションは減少

- 停止条件は支持関係生成の成績が低い?(事後テストでネットワークを下回った?)
 - 停止条件よりキャラクタの開始時間などが有効か
 - プロトコル中には状況に適切な指示関係が出現
 - 支持関係の形式は最も改善されている 部分的に予測 1b と一致

↓

理論的予測 1a・1b を支持

事前・事後テスト成績 (Table4)

(練習中「ストーリー」は選択問題を使用 (大括弧))

- 事前～事後で成績が有意に向上
- 事前・事後テスト×処遇に相互作用
- ANIMATE・ネットワークのみチュータは統制より有意に向上
- ANIMATE ユーザはアニメなし (ネットワーク・停止条件) より有意に向上
- アニメなし群は互いに差なし, 停止条件は統制と有意差なし

Table4 事前・事後テスト, 問題タイプの間値 (標準偏差)

群	人数	問題タイプ	成績		
			事前	練習	事後
統制群	14	解法	.62(.25)	.57(.39)	.66(.30)
		デバッグ	.21(.32)	.50(.39)	.57(.51)
		ストーリー	.29(.47)	[.43(.51)]	.21(.43)
		計	1.74(.78)	1.5 (.90)	2.1 (.93)
アニメーション	14	解法	.21(.38)	.89(.13)	.85(.17)
		デバッグ	.11(.29)	.75(.38)	.64(.50)
		ストーリー	.21(.42)	[.93(.27)]	.71(.47)
		計	.74(1.2)	2.57(.48)	3.05(.84)
停止条件	14	解法	.48(.35)	.82(.28)	.72(.31)
		デバッグ	.39(.36)	.43(.27)	.54(.50)
		ストーリー	.07(.27)	[.50(.52)]	.43(.51)
		計	1.42(.82)	1.75(.74)	2.41(1.2)
ネットワーク	14	解法	.38(.46)	.84(.19)	.71(.32)
		デバッグ	.18(.29)	.61(.40)	.64(.50)
		ストーリー	.07(.27)	[.36(.50)]	.14(.36)
		計	1.01(.97)	1.81(.87)	2.2 (1.1)
全群	56	解法	.42(.39)	.78(.28)	.74(.28)
		デバッグ	.22(.32)	.57(.27)	.60(.49)
		ストーリー	.16(.37)	[.55(.50)]	.38(.49)
		計	1.22(1.0)	1.9 (.85)	2.46(1.1)

- 事前テストの統制は他 3 群より有意に高い
- ANIMATE による訓練で成績が大幅に向上
 - 計算機による数学環境それ自体も有意 (動機か)
- 解決問題 2 題 : アニメーション群と他群で有意差 予測 2
- ポストホックに : 統制群内, 解決に図使用者と未使用者に差 自ら状況に基づく推論実行
 - 先行研究 [Mayer 1982] と一致, しかし scaffolding がある点で ANIMATE は有意
- デバッグ問題 : 処遇による有意差なし
 - 転移には至らずか ?
- ストーリー問題 : 処遇の主効果, アニメーション群はネットワーク・統制群より有意に高い
 - 最も状況志向の問題 予測 3 を大いに支持

練習課題の成績

- 問題タイプ・処遇に主効果
- アニメーション群は他群より有意に高い
- 処遇×問題タイプの相互作用
 - アニメーション群の選択問題が高い
 - 統制群が解決問題で他群より低い
- デバッグ問題には差なし 予測 4 は支持されず
- 何にしてもアニメーション群は全て最高水準

7 DISCUSSION

- 認知プロセス理論：状況理解・数学知識を関係づける問題理解
- 生徒の誤りの分析による，状況に基づく推論学習環境の支援の検討
 - 予測 1 がいくらか正しいことを確認
- 生徒の問題解決行動の予測
 - 予測 2・3 を支持するデータ
- 類似する知見：LISP プログラミング・デバッグ [Kessler 1988; Singley,Anderson 1989]
- 文章題の解決は形式操作の正しさのみによらない